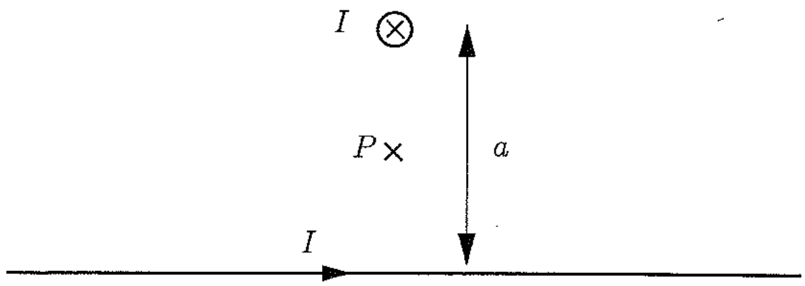
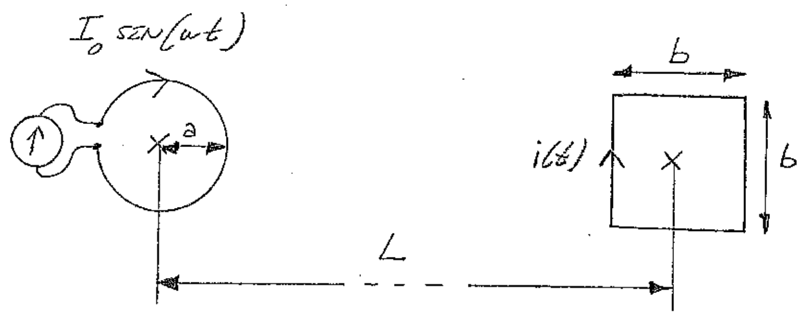
Elektromagnetisk fältteori för E,
måndag 2011-12-12, kl 8-13, Sparta C och D.

1.



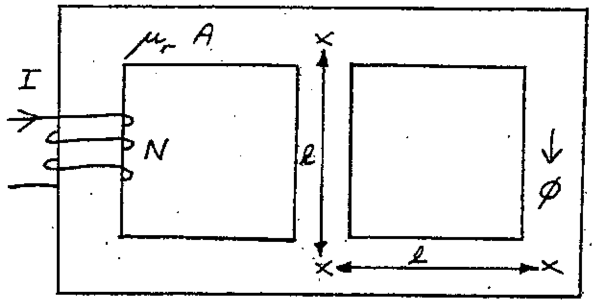
Två långa raka ledningstrådar löper i kors i rät vinkel så att det minsta avståndet mellan dem är a , se figuren ovan. I bägge ledningstrådarna flyter en konstant ström I . Bestäm magnetiska flödestätheten $\bar{B}$ i punkten P som ligger mitt emellan ledningstrådarna och som är markerad med ett kryss i figuren ovan.
Ledning: det kan vara lämpligt att införa ett koordinatsystem och sedan uttrycka $\bar{B}$ i detta koordinatsystem.

2.



En cirkulär slinga av ledningstråd har radie a . En strömgenerator är kopplad till den cirkulära slingan med korta ledningstrådar. Elektriska strömmen i den cirkulära slingan är $I_0 \sin(\omega t)$. På avståndet L från den cirkulära slingan finns en sluten kvadratisk slinga av ledningstråd. Sidan på den kvadratiska slingan är b . Resistansen i den kvadratiska slingan är R . De bägge slingorna ligger i samma plan; se figuren ovan. Det gäller att slingorna är små jämfört med avståndet mellan dem dvs $a << L$ och $b << L$. Situationen är kvasistationär dvs frekvensen är så låg att våglängden är mycket större än avståndet mellan slingorna. Självinduktionen i den kvadratiska slingan kan försummas.
Bestäm den ström $i(t)$ som induceras i den kvadratiska slingan.

3.



En linjär magnetisk krets har geometri enligt figuren ovan. Järnkärnan kan delas upp i tre delar (ben). Ett mittben av längden l och två ytterben av vardera längden $3l$. Järnets relativa permeabilitet är μ_r och järnets tvärsnittsarea är A. På det vänstra benet sitter en lindning med N varv, i ledningstråden flyter en ström I.

a) Bestäm magnetiska flödet ϕ genom det högra benet, referensriktning enligt figuren ovan.

b) Bestäm lindningens självinduktans L.

4. En elektromagnetisk våg utbreder sig i vakuum. Elektriska fältstyrkan $\bar{E}$ ges av:

$$\bar{E} = E_0 \sin(\omega t + ky + \frac{\pi}{4})\ \bar{e}_x$$

där vinkelfrekvensen ω och utbredningskonstanten k är positiva konstanter.

a) Vilken är vågens utbredningsriktning? Svar räcker.

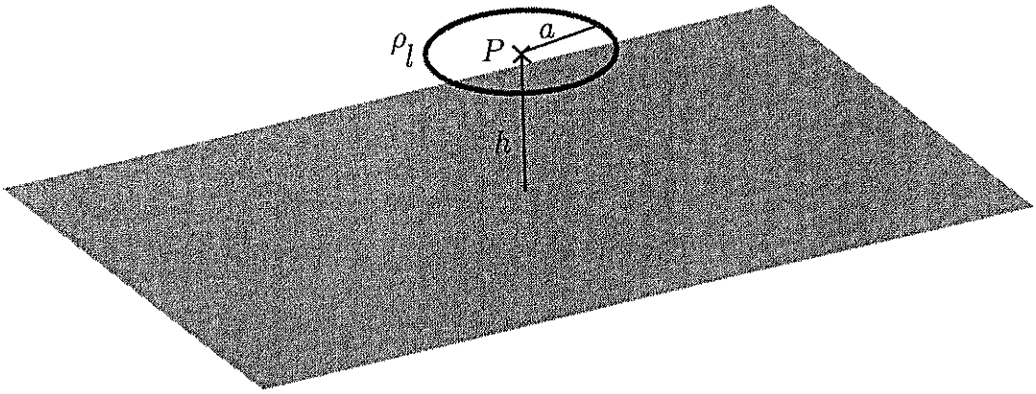
b) Med vilken hastighet utbreder sig vågen? Svar räcker.

c) Bestäm magnetiska flödestätheten $\bar{B}$.

d) Bestäm den energi W som passerar en plan yta, vars normal är parallell med vågens utbredningsriktning, under en period T. Arean av den plana ytan är A.

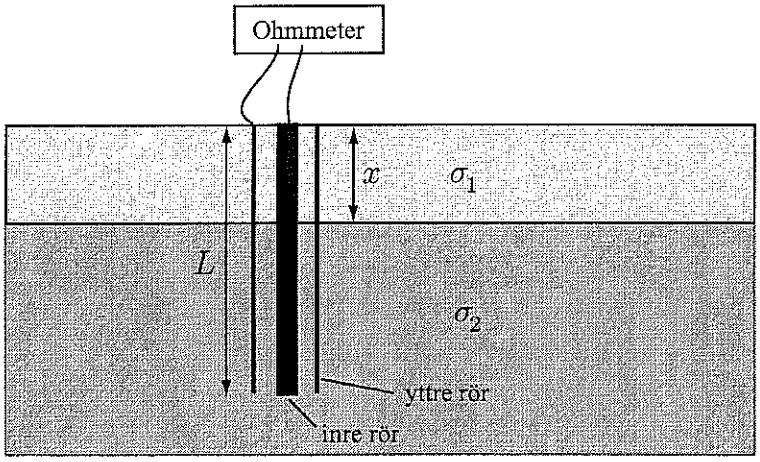
e) Rita hur man kan skapa en mottagarantenn av två raka antennspröt. Det ska framgå hur antennspröten ska vara riktade för att den spänning som uppstår över luftgapet i mottagarantennen ska bli så stor som möjligt.

5.



En cirkulär ring av ledningstråd har radie a. Laddning per längdenhet på tråden är lika med ρ_l. Ringen befinner sig på höjden h ovanför ett stort, jordat, ledande plan. Bestäm elektriska fältstyrkan $\bar{E}$ i punkten P. Punkten P är ringens mittpunkt och punkten P är markerad med ett kryss i figuren ovan.

6.



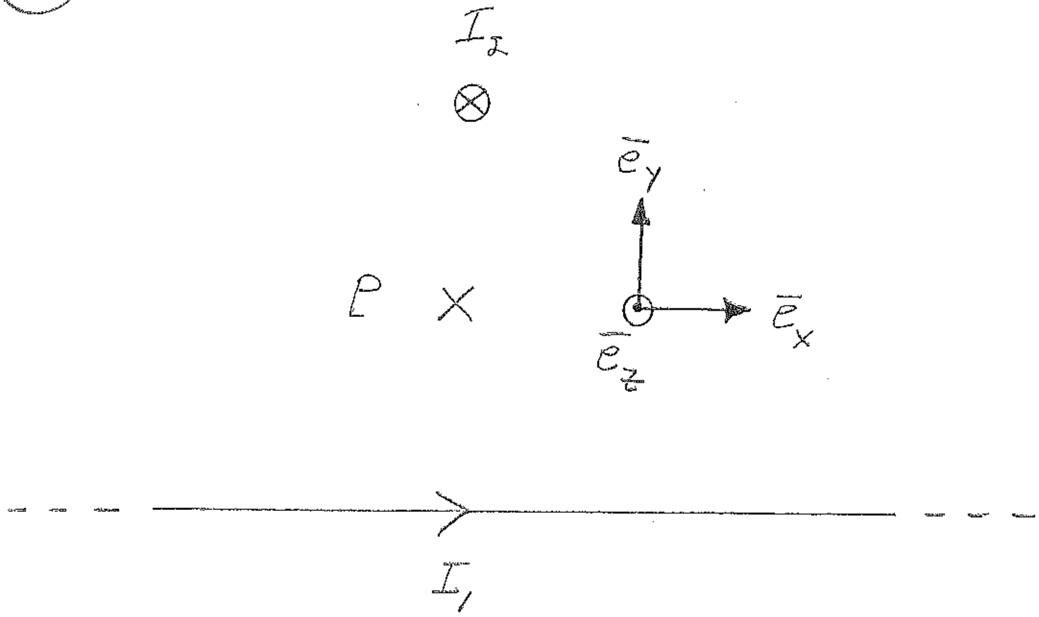
I en tank finns två vätskor med olika densitet och olika konduktivitet. Vätskorna blandar sig inte med varandra och den lättare vätskan lägger sig som ett skikt ovanpå den tyngre vätskan. För att bestämma tjockleken x av detta skikt har en mätapparatur bestående av två rör konstruerats. Det inre röret har ytterradie a och det yttre röret har innerradie b. Längden på rören är L. Konduktiviteten för den lättare vätskan är σ_1 och konduktiviteten för den tyngre vätskan är σ_2. Resistansen R mäts upp med en ohmmeter. Se figuren ovan.

Givna: a, b, L, σ_1, σ_2 och R.

Bestäm tjockleken x på skiktet av lättare vätska. Bortse från randfenomen vid anordningens undre kant.

Lösningar till tentamen i EF för E, 2011-12-12.

1



$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\bar{e}_\varphi$$ "$\bar{B}$ från lång rak ledn. tråd"

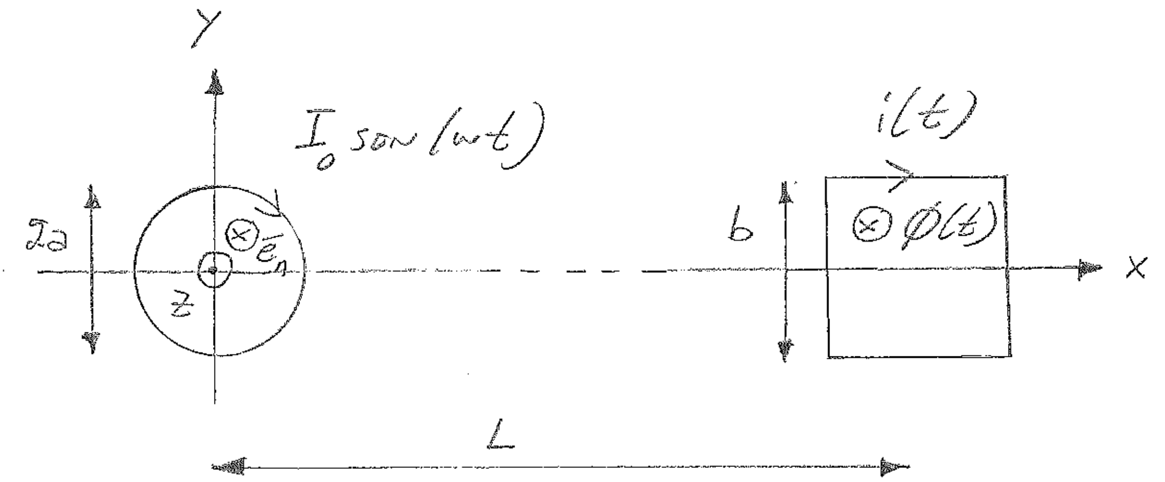
$$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)}\,\bar{e}_z = \frac{\mu_0 I_1}{\pi a}\,\bar{e}_z$$

$$\bar{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi\left(\frac{a}{2}\right)}\left(-\bar{e}_x\right) = -\frac{\mu_0 I_2}{\pi a}\,\bar{e}_x$$

$$\underline{\underline{\bar{B}}} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2 = \left[I_1 = I_2 = I\right] = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{\pi a}\left(-\bar{e}_x + \bar{e}_z\right)}} =$$

$$\underline{\underline{= \underbrace{\frac{\mu_0 I\sqrt{2}}{\pi a}}_{B}\;\underbrace{\frac{\left(-\bar{e}_x + \bar{e}_z\right)}{\sqrt{2}}}_{\bar{e}_B}}}$$

(2)



$$\bar{m} = \int I \bar{e}_n \, dS = \left[\bar{e}_n = -\bar{e}_z \right] = -I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \pi a^2 \bar{e}_z$$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \left(2\cos\theta \, \bar{e}_R + \operatorname{sen}\theta \, \bar{e}_\theta \right) = \Big[\theta = \frac{\pi}{2}, \ \bar{e}_\theta = -\bar{e}_z,$$

$$m = -I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \pi a^2, \ R = L \Big] =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi L^3} \left(-I_0 \operatorname{sen}(\omega t) \pi a^2 \right) \left(-\bar{e}_z \right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 \operatorname{sen}(\omega t)}{4\pi L^3} \bar{e}_z$$

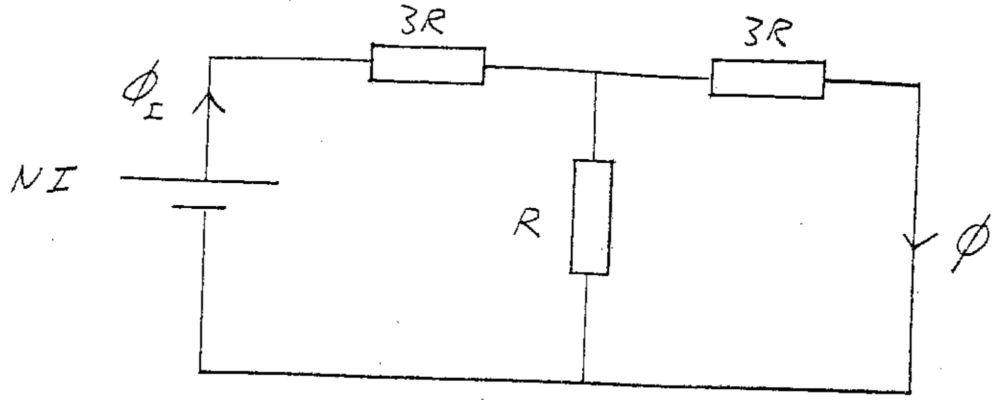
$$\phi = \int \bar{B} \cdot \bar{e}_n \, dS = \left[\bar{e}_n = -\bar{e}_z \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 \operatorname{sen}(\omega t) b^2}{4\pi L^3}$$

$$R\, i(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$$

$$\underline{i(t)} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi(t)}{dt} = \underline{\frac{\mu_0 I_0 \pi a^2 b^2 \omega \cos(\omega t)}{4\pi R L^3}}$$

③



$$R = \frac{l}{\mu_r \mu_0 A}$$

$$\phi_I = \frac{NI}{3R + \frac{3R \cdot R}{3R+R}} = \frac{NI}{3R + \frac{3}{4}R} = \frac{4NI}{15R}$$

a) $$\underline{\underline{\phi}} = \frac{R}{R+3R}\,\phi_I = \frac{1}{4}\,\frac{4NI}{15R} = \frac{NI}{15R} = \underline{\underline{\frac{NI\mu_r\mu_0 A}{15l}}}$$

b) $$\underline{\underline{L}} = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\phi_I}{I} = \frac{N}{I}\,\frac{4NI}{15R} = \frac{4N^2}{15R} =$$

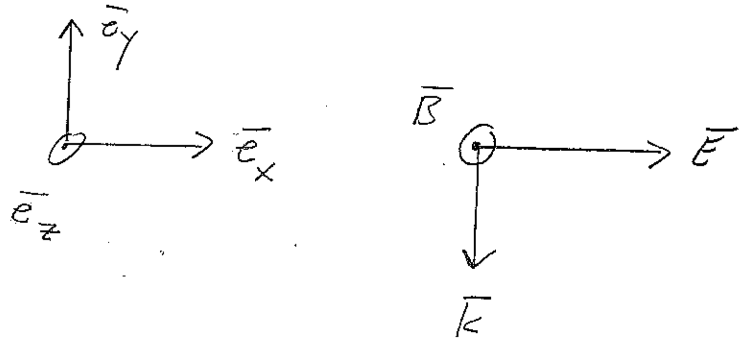
$$= \underline{\underline{\frac{4N^2\mu_r\mu_0 A}{15l}}}$$

④

a) $\underline{\underline{\text{utbredningsriktning} = -\bar{e}_y}}$

b) $\underline{\underline{\text{Ljushastigheten i vakuum} = c = \frac{\omega}{k}}}$

c)



$$E = cB \Rightarrow B = \frac{E}{c}$$

$$\underline{\underline{\bar{B}}} = \frac{E}{c}\bar{e}_z = \underline{\underline{\frac{E_0}{c}\sin\left(\omega t + ky + \frac{\pi}{4}\right)\bar{e}_z}}$$

d) $\bar{P}_s = \bar{E} \times \bar{H} = \left[\bar{B} = \mu_0 \bar{H} \Rightarrow \bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0}\right] =$

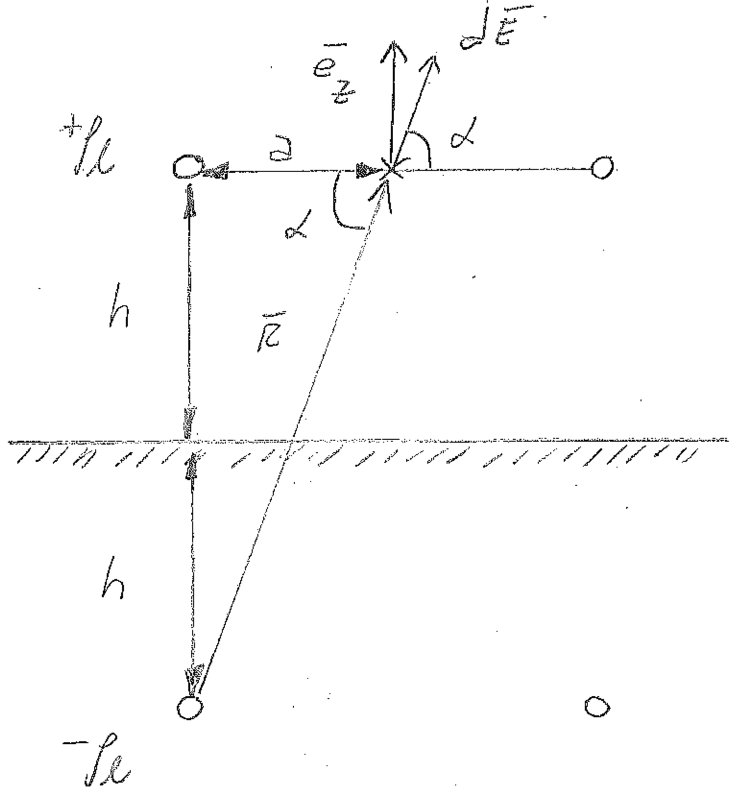
$$= E_0 \sin\left(\omega t + ky + \frac{\pi}{4}\right)\bar{e}_x \times \frac{E_0}{\mu_0 c}\sin\left(\omega t + ky + \frac{\pi}{4}\right)\bar{e}_z =$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin^2\left(\omega t + ky + \frac{\pi}{4}\right)(-\bar{e}_y)$$

Medelvärdet av $\sin^2(\omega t + \ldots)$ över en period är $\frac{1}{2}$.

$$\underline{\underline{W}} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\frac{1}{2}T \cdot A = \underline{\underline{\frac{E_0^2 T A}{2\mu_0 c}}}$$

5



"Spegelbilden" ger att $\bar{E}$ enligt:

$$d\bar{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\bar{e}_R$$

$$\underline{\underline{\bar{E}}} = \int \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin(\alpha)\,\bar{e}_z = \left[\sin(\alpha) = \frac{2h}{R}\right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\,\frac{2h}{R}\int dQ\,\bar{e}_z = \left[R = \sqrt{a^2 + 4h^2}\right] =$$

$$= \frac{h}{2\pi\varepsilon_0 (a^2+4h^2)^{3/2}}\,(-\rho_l)\,2\pi a\,\bar{e}_z =$$

$$= \underline{\underline{\frac{-\rho_l\,h a}{\varepsilon_0 (a^2+4h^2)^{3/2}}\,\bar{e}_z}}$$

(6) Allmän formel för resistans:

$$R = \rho \frac{l}{A} = \left[\rho = \frac{1}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A}$$

Först beräknas R_1:

$$dR_1 = \frac{1}{\sigma_1}\frac{dr}{2\pi r x}$$

$$R_1 = \int dR_1 = \int_a^b \frac{1}{\sigma_1}\frac{dr}{2\pi r x} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 x}\int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi\sigma_1 x} \Rightarrow G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{2\pi\sigma_1 x}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

På samma sätt fås $G_I = \frac{2\pi\sigma_I (L-x)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$

$$G = G_1 + G_I = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}\left[\sigma_1 x + \sigma_I L - \sigma_I x\right]$$

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}\frac{1}{\left[(\sigma_1 - \sigma_I)x + \sigma_I L\right]}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_I)x + \sigma_I L} = \frac{2\pi R}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_I)x + \sigma_I L = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi R}$$

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_I}\left[\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi R} - \sigma_I L\right]}}$$