LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Inst. för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2013-12-19 i
DIGITAL SIGNALBEHANDLING - ESS040 Tid: 14.00–19.00
Sal: MA08

Hjälpmedel — Miniräknare och formelsamling i signalbehandling.

Observandum — För att underlätta rättningen:
-Lös endast en uppgift per blad.
-Skriv namn på samtliga blad.
Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
Betygsgränser: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).

1. Ett LTI-system är beskrivet av följande tidsdiskreta impulssvar

$$h(n) = [\underset{\uparrow}{0} \quad -1 \quad -3 \quad 2 \quad -2\,],$$

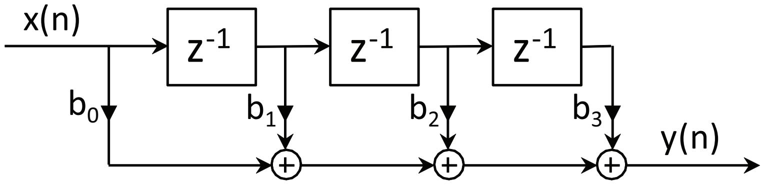
   a) Bestäm systemets differensekvation. (0.1p)
   b) Bestäm systemfunktionen $H(z)$. (0.1p)
   c) Bestäm Fouriertransformen, $H(\omega)$, samt 7-punkters DFT, $H(k)$. (0.1p)
   d) Bestäm den linjära autokorrelationen, $r_{hh}(n)$. (0.1p)
   e) Bestäm utsignalen om insignalen är given av, (0.1p)

$$x(n) = [\,1 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad 1 \quad -1\,].$$

2. Ett hjul med fem ekrar roterar med 12 varv/sek motsols (dvs +12 Hz). Vi har en videokamera med valbar sampeltakt, F_s, mellan 50-80 bilder/sek som spelar in hjulets rörelse. Bestäm den valbara sampeltakten, F_s, så att följande uppfattade rotationshastigheter erhålls:

   a) Rotationshastigheten 0 varv/sek. (0.1p)
   b) Rotationshastigheten 2 varv/sek motsols (dvs +2 Hz). (0.2p)
   c) Rotationshastigheten 2 varv/sek medsols (dvs -2 Hz). (0.2p)

3. Bestäm parametrarna i nedanstående krets så att vi får en linjär fasfunktion, förstärkningen blir 1 vid vinkelfrekvens $\omega = 0$, samt att vinkelfrekvenserna $\omega = \pi/2$ samt $\omega = \pi$ spärras. Bestäm också systemets amplitudfunktion och fasfunktion samt skissa amplitudfunktionen i intervallet $0 \leq \omega \leq \pi$. (1.0p)



4. På sista sidan finns en 5x3-matris av bilder som illustrerar tre olika LTI-system. (OBS! De stora trianglarna längs ner betyder multiplikatorer.)

   a) Vilken amplitudfunktion hör till respektive pol-nollställediagram? (0.2p)
   b) Vilken fasfunktion hör till respektive pol-nollställediagram? (0.2p)
   c) Vilket impulssvar hör till respektive pol-nollställediagram? (0.2p)
   d) Vilken struktur hör till respektive pol-nollställediagram? (0.2p)
   e) Vilken överföringsfunktion nedan, hör till respektive pol-nollställediagram? (0.2p)

$$
\begin{aligned}
A: H(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \\
B: H(z) &= \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\
C: H(z) &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}
\end{aligned}
$$

5. En krets är given av differensekvationen,

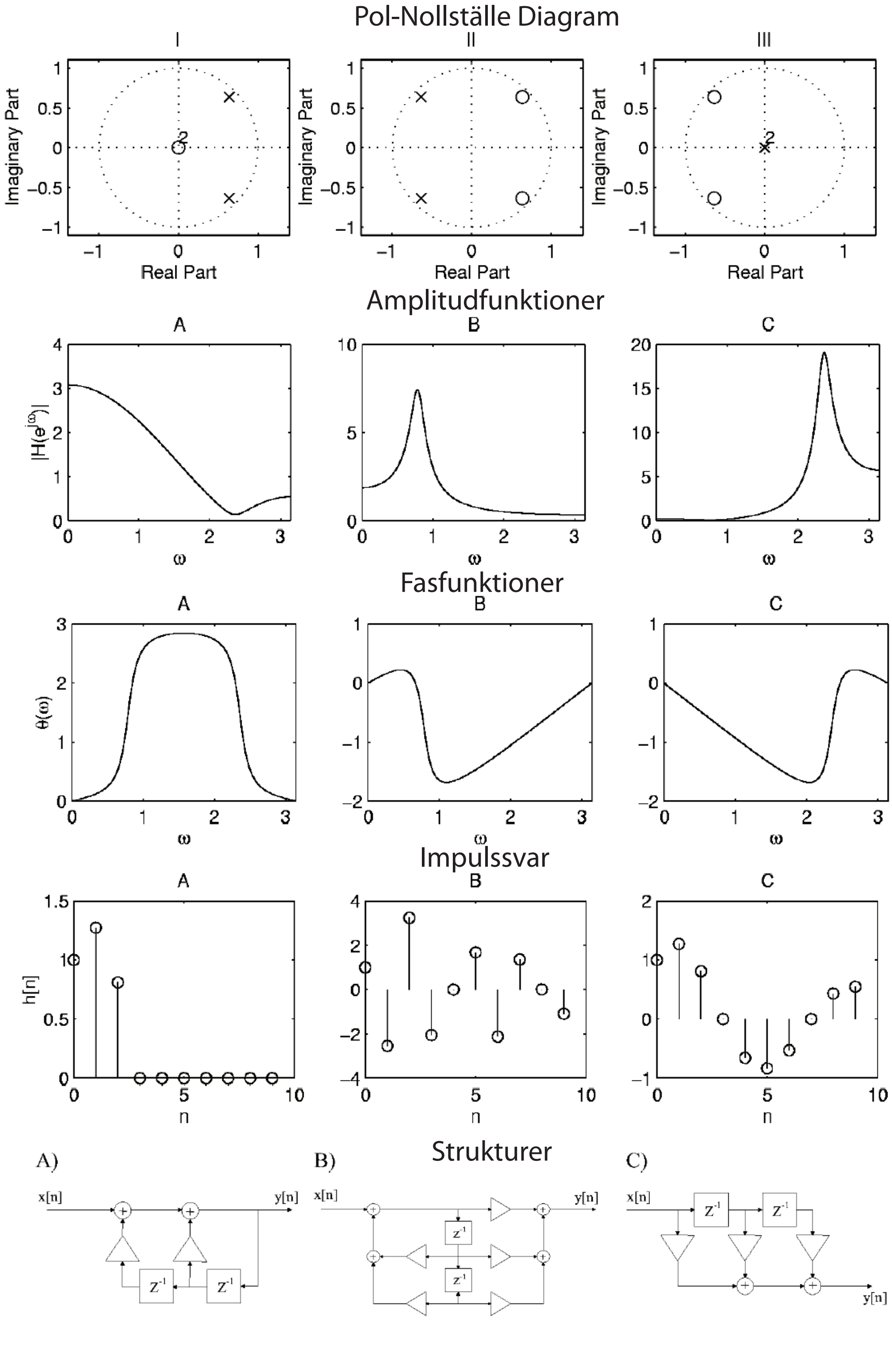
$$y(n) - y(n-1) + 0.5y(n-2) = x(n)$$

   Kretsen har begynnelsevärdena $y(-1) = 0$, $y(-2) = 2$, och insignalen är $x(n) = u(n)$. Bestäm för $n \geq 0$

   a) Zero-input-lösningen, $y_{zi}(n)$! (0.2p)
   b) Zero-state-lösningen, $y_{zs}(n)$! (0.2p)
   c) Den totala transienta lösningen, $y_{trans}(n)$! (0.2p)
   d) Den stationära lösningen, $y_{ss}(n)$! (0.2p)
   e) Den totala lösningen, $y(n)$! (0.2p)

6. En lärare berättar en hemlighet till sin klass i signalbehandling på 78 studenter. Varje person som har hört hemligheten sprider denna hemlighet vidare till två nya personer första veckan efter att ha hört hemligheten. Därefter sprider varje person hemligheten vidare till fyra nya personer, varje därpå följande vecka tills alla känner till hemligheten. Bestäm en differensekvation som beskriver förloppet. Lös därefter differensekvationen och bestäm hur många veckor det tar för alla människor på jorden att ha hört hemligheten! Antag $7 \cdot 10^9$ personer på jorden. (1.0p)

Lycka till!



Figur 1: *LTI-systemen i uppgift 4.*

SVAR OCH LÖSNINGAR TENTAMEN 2013-12-19

Svar 1. a) Från faltningssumman fås direkt (ty FIR filter)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) => y(n) = -x(n-1)-3x(n-2)+2x(n-3)-2x(n-4)$$

b) Definitionen av Z-transfomen ger,

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = -z^{-1} - 3z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-4}$$

c) Fouriertransformen ges av, (förenkling inte nödvändig)

$$\begin{aligned} H(w) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} &= -e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega} + 2e^{-3j\omega} - 2e^{-4j\omega} = \\ &= -e^{-j\omega} - 3e^{-2j\omega} + 4e^{(j7/2\omega+\pi/4)} sin(\omega/2) \end{aligned}$$

7-punkters DFT (dvs N=7) ges av definitionen

$$H(k) \;=\; \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j2\pi kn/N} = -e^{-2j\pi k/7} - 3e^{-4j\pi k/7} + 2e^{-6j\pi k/7} - 2e^{-8j\pi k/7}$$

d) Den linjära autokorrolationen ges av

$$r_{hh}(n) \;=\; h(n) * h(-n) = [\, 2 \quad 4 \quad -7 \quad \underset{\uparrow}{18} \quad -7 \quad 4 \quad 2\,].$$

e) Utsignalen ges av faltningen

$$y(n) \;=\; h(n) * x(n) = [\, 0 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad -2 \quad 4 \quad -6 \quad 7 \quad -4 \quad 2\,].$$

Svar 2. Sampeltakten ges av lösningen till följande ekvation

$$F_s(\frac{12}{F_s} \pm k\frac{1}{E}) = F$$

Där F är den uppfattade frekvensen, E är antalet ekrar och k är ett heltal, dvs vi får (för $k = -1$)

a)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 0 \quad => F_s = 5 \cdot 12 = 60$$

b)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 2 \quad => F_s = 5 \cdot (12 - 2) = 50$$

c)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = -2 \qquad => F_s = 5 \cdot (12 + 2) = 70$$

Svar 3. Linjär fasfunktion $->$ välj symmetriskt impulssvar, dvs $b_0 = b_3,\ b_1 = b_2$. Z-transformen blir då,

$$H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_1 z^{-2} + b_0 z^{-3}$$

och Fouriertransformen blir,

$$\begin{aligned} H(w) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} &= b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_1 e^{-2j\omega} + b_0 e^{-3j\omega} \\ &= e^{-j\omega 3/2}\left(2b_0 cos(3\omega/2) + 2b_1 cos(\omega/2)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

Ta beloppet av Fouriertransformen och sätt in värdena enligt kraven, ger följande ekvationssystem, (OBS! Sista ekvationen tillför inget)

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\quad => \quad 2b_0 + 2b_1 = \pm 1 \\ \omega = \frac{\pi}{2} &\quad => \quad 2b_0(-\frac{1}{\sqrt{(2)}}) + 2b_1(\frac{1}{\sqrt{(2)}}) = 0 \\ \omega = \pi &\quad => \quad 2b_0 \cdot (0) + 2b_1 \cdot (0) = 0 \end{aligned}$$

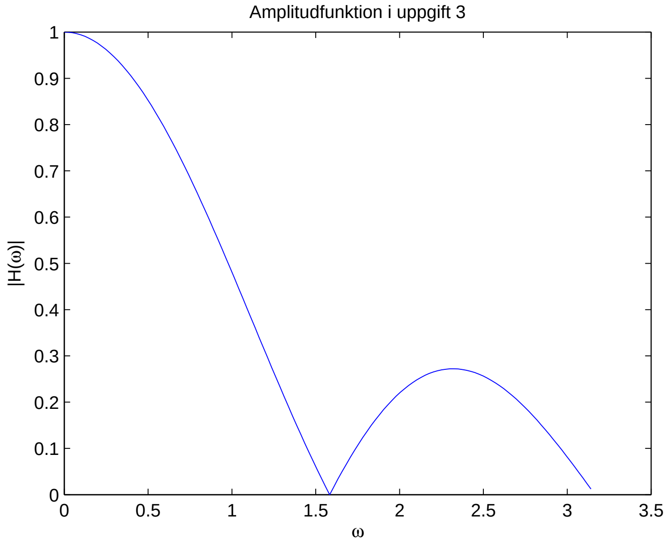
ger ekvationssystemet uttryckt i matrisform,

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lösningen ges av $b_0 = b_1 = \pm 0.25$. Ur Eq. (1) fås amplitudfunktionen och fasfunktionen enligt,

$$|H(\omega)| = \frac{1}{2}|cos(3\omega/2) + cos(\omega/2)|$$

$$arg(H(\omega)) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\omega & om \quad (0 < \omega < \frac{\pi}{2}) \\ -\frac{3}{2}\omega + \pi & om \quad (\frac{\pi}{2} < \omega < \pi) \end{cases}$$



Svar 4.
a) I-B, II-C, III-A
b) I-B, II-A, III-C
c) I-C, II-B, III-A
d) I-A, II-B, III-C
e) I-B, II-C, III-A

Svar 5. Då vi har begynnelsevärden använder vi Z^+-transformen av differensekvationen, vilket ger,

$$Y^+(z) - z^{-1}\left[Y^+(z) + y(-1)z\right] + 0.5z^{-2}\left[Y^+(z) + y(-1)z + y(-2)z^2\right] = X^+(z)$$

(Observera att $X^+(z) = X(z)$ eftersom $x(n)$ är kausal)
Bryt ut och lös ut $Y^+(z)$ samt sätt in begynnelsevärden, vilket ger,

$$Y^+(z) = \frac{X(z) - 1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} = \underbrace{\frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}}_{H(z)} X(z) - \frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

Z-transformen av $x(n) = u(n)$ kan tex fås ur tabell, dvs $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, insatt i ovanstående och partialbråksuppdelad första term ger (Observera att poler till $H(z)$ har komplexvärda rötter och därför behåller vi andra ordningen i partialbråksuppdelningen),

$$Y^+(z) = \underbrace{\underbrace{\frac{2}{1 - z^{-1}}}_{Stationary} + \underbrace{\frac{(-1) + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}}_{Transient\,from\,input}}_{Zero-State\ H(z)X(z)} - \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}}_{Transient\,from\,initial\,conditions}}_{Zero-Input}$$

Invers Z-transform av respektive komponent ovan ger följande svar;

a) $y_{zi}(n) = -(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \left(\cos(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n)\right) u(n)$

b) $y_{zs}(n) = 2u(n) + (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \left(\sin(\frac{\pi}{4}n) - \cos(\frac{\pi}{4}n)\right) u(n)$

c)

$$\begin{aligned} y_{trans}(n) &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \left(\sin(\frac{\pi}{4}n) - \cos(\frac{\pi}{4}n)\right) u(n) - (\frac{1}{\sqrt{2}})^n \left(\sin(\frac{\pi}{4}n) + \cos(\frac{\pi}{4}n)\right) u(n) \\ &= -2(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \cos(\frac{\pi}{4}n)u(n) \end{aligned}$$

d) $y_{ss}(n) = 2u(n)$

e)

$$\begin{aligned} y(n) &= y_{zi}(n) + y_{zs}(n) = y_{trans}(n) + y_{ss}(n) \\ &= 2u(n) - 2(\frac{1}{\sqrt{2}})^n \cos(\frac{\pi}{4}n)u(n) \end{aligned}$$

Svar 6. Problemet kan ställas upp som en andra ordningens differens-ekvation av $y(n)$ som beskriver antalet personer som känner till hemligheten vid varje vecka n, med begynnelsevärden, enligt

$$y(n) = (a+b)y(n-1) + cy(n-2), \qquad y(-1) = d,\ y(-2) = 0$$

där
a = antalet nya personer som varje person tillför första veckan.
b = 1, då gruppen som sprider hemligheten ingår.
c = antalet ytterligare nya personer som varje student tillför andra veckan.
d = gruppens storlek från början.

Differens-ekvationen blir,

$$y(n) = 3y(n-1) + 2y(n-2), \qquad y(-1) = 78,\ y(-2) = 0$$

Z^+-transformering ger,

$$Y^+(z) = 78\frac{3 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - 2z^{-2}}$$

Poler till systemet fås ur,

$$z^2 - 3z - 2 = 0 => p_{12} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Partialbråksuppdelning ger,

$$Y^+(z) = 78\frac{3 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - 2z^{-2}} = 78\left(\frac{A}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{B}{(1 - p_2 z^{-1})}\right)$$

där handpåläggning ger,

$$A = \frac{(3 + 2/p_1)}{(1 - p_2/p_1)} \approx 3.0765,\ B = \frac{(3 + 2/p_2)}{(1 - p_1/p_2)} \approx -0.0765$$

dvs lösningen till differens-ekvationen ges av

$$y(n) = 78(Ap_1^n + Bp_2^n)$$

eftersom $y(13) < 7 \cdot 10^9 < y(14)$, fås att alla personer på jorden får reda på hemligheten i v14, dvs i den 15:e veckan (start i v0).