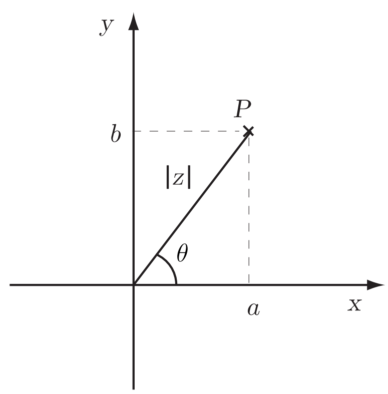
Komplexa tal

De komplexa talen används när man behandlar växelström inom elektroniken. Imaginära enheten betecknas i elektroniken med j (i, som används i matematiken, är upptaget av strömmen). Den definieras av

$$\mathrm{j}^2 = -1$$

Ett imaginärt tal är en produkt av den imaginära enheten och ett reellt tal, t.ex. j2. Ett komplext tal är en summa av ett reellt och ett imaginärt tal. Om a och b är reella tal är ja ett imaginärt tal och

$$\begin{cases} z = a + \mathrm{j}b & \text{ett komplext tal} \\ \mathrm{Re}\{z\} = a & \text{realdelen av } z \\ \mathrm{Im}\{z\} = b & \text{imaginärdelen av } z \\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2} & \text{absolutbeloppet av } z \end{cases}$$



I det komplexa talplanet kallas $x-$axeln den reella axeln och $y-$axeln den imaginära axeln. Ett komplext tal $z = a + \mathrm{j}b$ avbildas då i punkten $P = (a, b)$. Absolutbeloppet av z är enligt Pytagoras sats längden av vektorn från origo till P. Om vi inför vinkeln θ ser vi att

$$\begin{aligned} a &= |z|\cos\theta \\ b &= |z|\sin\theta \\ z &= |z|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) \end{aligned} \tag{0.1}$$

Vinkeln θ kallas för argumentet av z och betecknas $\arg\{z\}$. Den är vald att ligga i intervallet $-\pi < \theta \leq \pi$[1]. Från figuren ser vi att $\tan\theta = b/a$. Genom att invertera denna relation får vi ett explicit uttryck för θ. Om $a \geq 0$ ges θ av

$$\arg\{z\} = \theta = \arctan(b/a) \tag{0.2}$$

[1] Man kan alltid lägga till en multipel av 2π till θ och fortfarande uppfylla relationerna i (0.1)

I viss literatur används beteckningen $\tan^{-1}$ för arcus tangens. Om $a \leq 0$ ges θ av (i radianer[2])

$$\arg\{z\} = \theta = \begin{cases} \pi - \arctan(b/|a|), \,\text{om}\, b \geq 0 \\ -\pi - \arctan(b/|a|) = -\pi + \arctan(|b|/|a|), \,\text{om}\, b \leq 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

Anledningen är att funktionen arctan endast ger värden mellan $-\pi/2$ och $\pi/2$. I elektronikkursen kommer vi alltid se till att $a \geq 0$ när vi skall skriva ett komplext tal på komplex form. Därmed kan vi alltid använda ekvation (0.2) och slipper att använda ekvation (0.3).

Komplexkonjugat

Komplexkonjugering innebär att man byter tecken på imaginärdelen av det komplexa talet. Komplexkonjugatet av z betecknas[3] z^*

$$\begin{aligned} z &= a + \mathrm{j}b \\ z^* &= a - \mathrm{j}b \end{aligned}$$

Det är enkelt att se att

$$z^* z = z z^* = a^2 + b^2 = |z|^2$$

och detta kan vi utnyttja när vi bestämmer real- och imaginärdelen av $1/z$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z^* z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{a - \mathrm{j}b}{a^2 + b^2}$$

Därmed fås

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{z}\right\} &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{z}\right\} &= -\frac{b}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Polär form av ett komplext tal

Skrivsättet $z = a + \mathrm{j}b$ kallas för rektangulär form. Genom att jämföra potensserieutvecklingarna av $\sin\theta$, $\cos\theta$ och $e^{\mathrm{j}\theta}$ kan man visa att (detta gås igenom i matten)

$$e^{\mathrm{j}\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$$

Från ekvation (0.1) ser vi att vi kan skriva ett komplext tal $z = a + \mathrm{j}b$ på formen

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta) = |z|e^{\mathrm{j}\theta} = |z|e^{\mathrm{j}\arg\{z\}}$$

[2] Vi mäter oftast vinklar i radianer. Relationen mellan grader och radianer är radianer=$\pi\cdot$grader/180

[3] i viss litteratur betecknas komplexkonjugatet $\bar{z}$.

Denna representation av z kallas för den polära formen av z. Vi ser också att

$$z^* = |z|e^{-\mathrm{j}\arg\{z\}}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|e^{\mathrm{j}\arg\{z\}}} = \frac{e^{-\mathrm{j}\arg\{z\}}}{|z|}$$

Exempel Låt $z_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$ och $z_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$ vara två komplexa tal med $a_1 > 0$ och $a_2 > 0$. Då gälller

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|e^{\mathrm{j}\arg\{z_1\}}|z_2|e^{\mathrm{j}\arg\{z_2\}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}e^{\mathrm{j}\arctan(b_1/a_1)}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}e^{\mathrm{j}\arctan(b_2/a_2)} \\ &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}e^{\mathrm{j}(\arctan(b_1/a_1) + \arctan(b_2/a_2))} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}e^{\mathrm{j}(\arctan(b_1/a_1) - \arctan(b_2/a_2))} \end{aligned}$$

Komplex representation av tidsharmoniska storheter

I växelströmsläran används komplexa representationer av de tidsharmoniska strömmarna och spänningarna. En tidsharmonisk ström kan allmänt skrivas

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Här är ω vinkelfrekvensen, vilken mäts i radianer per sekund och är relaterad till den vanliga frekvensen f via $\omega = 2\pi f$. Strömmens amplitud är I_0 och dess fas relativt $\cos\omega t$ är ϕ. Den komplexa representationen av $i(t)$ är

$$I = I_0 e^{\mathrm{j}\phi}$$

Den komplexa strömmen I innehåller informationen om amplitud och fas eftersom

$$\begin{aligned} |I| &= I_0 = \text{amplitud} \\ \arg\{I\} &= \phi = \text{fas relativt } \cos\omega t \end{aligned}$$

Om vi känner den komplexa strömmen I, får vi den verkliga tidsberoende strömmen $i(t)$ genom regeln

$$i(t) = \mathrm{Re}\{Ie^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

Ett snabbare sätt att transformera från I till $i(t)$ är att bestämma absolutbeloppet $|I|$ och argumentet $\phi = \arg\{I\}$ av I, och direkt skriva upp $i(t)$ som $i(t) = |I|\cos(\omega t + \phi)$.

När fasen mäts relativt $\cos\omega t$ säger vi att $\cos\omega t$ är riktfas och att vi använder realdelskonventionen för att transformera mellan tids- och frekvensplan. Om en tidsharmonisk ström eller spänning skrivs som en sinusfunktion kan det vara praktiskt att mäta alla faser relativt $\sin\omega t$ och därmed använda $\sin\omega t$ som riktfas. Vi använder då imaginärdelskonventionen för att transformera mellan tids- och frekvensplan. Den komplexa representationen av

$$v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$$

kan då skrivas

$$V = V_0 e^{\mathrm{j}\phi}$$

För att komma tillbaks till den tidsberoende spänningen kan vi antingen utnyttja regeln

$$v(t) = \mathrm{Im}\{V e^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

eller så bestämmer vi absolutbeloppet $|V|$ och argumentet $\phi = \arg\{V\}$ av V och skriver direkt upp $v(t)$ som $v(t) = |V|\sin(\omega t + \phi)$.

Kommentarer

De tidsharmoniska spänningarna och strömmarna uppfyller differentialekvationer vilka kan vara komplicerade att lösa. De komplexa spänningarna och strömmarna uppfyller i stället algebraiska ekvationer, vilka oftast är enkla att lösa. När man använder de tidsberoende storheterna brukar man säga att man är i tidsplanet medan man är i frekvensplanet när de komplexa storeheterna används. Vi kommer att utnyttja frekvensplanet betydligt mer än tidsplanet i växelströmsläran.

Hambley använder ett förkortat skrivsätt för de komplexa talen på polär form. Han skriver t.ex. $z = 1 + \mathrm{j} = \sqrt{2}e^{\mathrm{j}\pi/4}$ på formen $z = \sqrt{2}\angle 45^\circ$ och mer allmänt $Z = |Z|\angle\arg\{Z\}$ där vinkeln $\arg\{Z\}$ skrivs i grader. Hambleys skrivsätt har fördelen att det refererar till det komplexa talplanet.

Problem

1

Skriv följande komplexa tal på rektangulär form $z = a + \mathrm{j}b$:

a) $(1 + \mathrm{j}4)(3 - \mathrm{j}5)$

b) $\mathrm{j}(2 - \mathrm{j}3)$

c) $\dfrac{1 - \mathrm{j}2}{\mathrm{j}}$

d) $\dfrac{3 + \mathrm{j}4}{\mathrm{j}(2 - \mathrm{j}2)}$

e) $(3 + \mathrm{j})e^{\mathrm{j}\pi}$

f) $e^{-\mathrm{j}\pi/3}$

g) $(1 - \mathrm{j})e^{\mathrm{j}\pi/4}$

h) $\mathrm{j}e^{\mathrm{j}\pi/2}$

i) j^{j}

2

Skriv följande komplexa tal på polär form. Rita in dem i komplexa talplanet för att kontrollera att argumentet och absolutbeloppet är rimliga:

a) $1+\mathrm{j}$

b) $1-\mathrm{j}$

c) j

d) $\frac{1}{\mathrm{j}}$

e) $\mathrm{j}(1-\mathrm{j})$

f) $\frac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}}$

3

I denna uppgift betecknar R resistans, C kapacitans, ω vinkelfrekvens och L induktans. Skriv följande komplexa tal på polär form:

a) $R+\mathrm{j}\omega L$

b) $R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$

c) $\frac{R+\mathrm{j}\omega L}{R+1/(\mathrm{j}\omega C)}$

4

Använd realdelskonventionen för att bestämma den komplexa spänningen i följande fall:

a) $v(t)=V_0\cos(\omega t+\pi/4)$

b) $v(t)=V_0\sin\omega t$

5

Använd imaginärdelskonventionen för att bestämma den komplexa strömmen i följande fall:

a) $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi/4)$

b) $i(t) = I_0 \sin(\omega t + \pi/3) + I_0 \sin \omega t$

6

Vinkelfrekvensen är ω, $\cos \omega t$ är riktfas och V_0 är reell. Bestäm den tidsberoende spänningen $v(t)$ då den komplexa spänningen är
a) $V = V_0(1 + \mathrm{j})$

b) $V = \mathrm{j}V_0$

c) $V = V_0 \dfrac{R}{R + \mathrm{j}\omega L}$

d) $V = V_0 \dfrac{R + \mathrm{j}\omega L}{\mathrm{j}(R + 1/(\mathrm{j}\omega C))}$

Svar till problemen

1: a) $23 + \mathrm{j}7$ b) $3 + \mathrm{j}2$ c) $-2 - j$ d) $\frac{7+\mathrm{j}}{4}$ e) $-3 - \mathrm{j}$

f) $\frac{1-\mathrm{j}\sqrt{3}}{2}$ g) $\sqrt{2}$ h) -1 i) $e^{-\pi/2}$ ty $\mathrm{j}^{\mathrm{j}} = (e^{\mathrm{j}\pi/2})^{\mathrm{j}} = e^{\mathrm{jj}\pi/2} = e^{-\pi/2}$

2: a) $\sqrt{2}e^{\mathrm{j}\pi/4}$ b) $\sqrt{2}e^{-\mathrm{j}\pi/4}$ c) $e^{\mathrm{j}\pi/2}$ d) $e^{-\mathrm{j}\pi/2}$ e) $\sqrt{2}e^{\mathrm{j}\pi/4}$

f) $\dfrac{1-\mathrm{j}}{1+\mathrm{j}} = \dfrac{e^{-\mathrm{j}\pi/4}}{e^{\mathrm{j}\pi/4}} = e^{-\mathrm{j}\pi/4}e^{-\mathrm{j}\pi/4} = e^{-\mathrm{j}\pi/2}$

3: a) $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}e^{\mathrm{j}\arctan(\omega L/R)}$ b) $\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}e^{-\mathrm{j}\arctan(1/(\omega RC))}$

c) $\sqrt{\dfrac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + 1/(\omega C)^2}}e^{\mathrm{j}(\arctan(\omega L/R)+\arctan(1/(\omega RC)))}$

4: a) $V = V_0 e^{j\pi/4}$ b) $V_0 e^{-\mathrm{j}\pi/2}$ (använd $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$)

5: a) $I_0 e^{\mathrm{j}\pi/4} = I_0 \dfrac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}$ b) $I_0(e^{\mathrm{j}\pi/3} + 1) = I_0 \left(\frac{3}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I_0\sqrt{3}e^{\mathrm{j}\arctan(1/\sqrt{3})}$

6: a) $\sqrt{2}V_0 \cos(\omega t + \pi/4)$ b) $V_0 \cos(\omega t + \pi/2)$ c) $V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}} \cos(\omega t - \arctan(\omega L/R))$

d) $V_0 \frac{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \arctan(\omega L/R) + \arctan(1/(\omega CR)) - \pi/2)$
eller alternativt

$$V_0 \frac{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}} \cos(\omega t + \arctan(\omega L/R) - \arctan(\omega CR))$$