Föreläsning 7

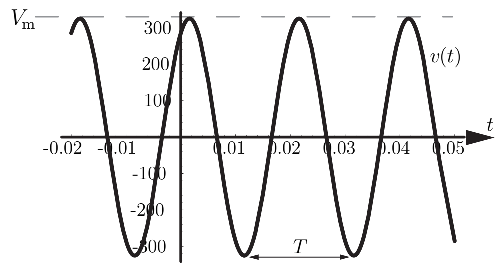
Hambley avsnitt 5.1-4[1]

Tidsharmoniska (sinusformade) signaler är oerhört betydelsefulla inom de flesta typer av kommunikationssystem. Radio, TV, mobiltelefoner, kabel-TV, bluetooth, WiFi m.m., utnyttjar sinusformade signaler. Informationen överförs genom att modulera amplituden, frekvensen eller fasen för den sinusformade bärvågen. Det gäller både digitala och analoga system.

Växelström i tidsdomän [5.1]

En tidsharmoniska signal $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ är bestämd av

V_0 : amplitud
ϕ : fasvinkel (ibland kallad fas)
ω : vinkelfrekvens($\omega = 2\pi f$)
T : periodtid($T = 1/f$)



<u>Exempel:</u> Hushållsel
För $v(t) = \sqrt{2}\,230\cos(100\,\pi\,t - 0.5)\,\mathrm{V}$
är $V_0 = \sqrt{2}\,230\,\mathrm{V} \approx 325\,\mathrm{V}$, $\phi = -0.5\,\mathrm{rad}$,
$\omega = 100\,\pi\,\mathrm{rad/s}$, $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $T = 0.02\,\mathrm{s}$

Växelström i frekvensdomän [5.2]

Tidsharmoniska signaler i elektriska kretsar analyseras enklast med jω-metoden (phasors i Hambley). Metoden baseras på att de tidsharmoniska spänningarna och strömmarna representeras av komplexa spänningar och strömmar. De komplexa spänningarna och strömmarna kan analyseras med samma metoder som används för resistiva nät.

Komplexa spänningar och strömmar

Eulers formel för komplexa tal säger att om A och α är reella tal så gäller

$$Ae^{\mathrm{j}\alpha} = A(\cos\alpha + \mathrm{j}\sin\alpha) \;\Rightarrow\; A\cos\alpha = \mathrm{Re}\{Ae^{\mathrm{j}\alpha}\}$$

[1]Framställningen av komplexa spänningar och strömmar i dessa anteckningar skiljer sig något mot den i Hambley eftersom Hambley använder Phasors. Föreläsningarna, exempelsamlingen och tentorna håller sig till notationen i dessa anteckningar.

Det innebär att en tidsharmonisk signal med spänning $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ och ström $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \psi)$ kan skrivas

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{Re}\left\{V_0 e^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{V_0 e^{\mathrm{j}\phi} e^{\mathrm{j}\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{V e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \\ i(t) &= \mathrm{Re}\left\{I_0 e^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{I_0 e^{\mathrm{j}\psi} e^{\mathrm{j}\omega t)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{I e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} \end{aligned} \tag{0.1}$$

där $V = V_0 e^{\mathrm{j}\phi}$ är den komplexa spänningen och $I = I_0 e^{\mathrm{j}\psi}$ den komplexa strömmen. För en kondensator gäller

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{Re}\left\{V e^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = C\mathrm{Re}\left\{V\frac{\mathrm{d}e^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\omega C V e^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

och därmed $I = \mathrm{j}\omega C V$. För en induktans gäller

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{j}\omega L I e^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$$

och därmed $V = \mathrm{j}\omega L$. För en resistans gäller fortfarande Ohms lag, d.v.s. $v(t) = Ri(t) = \mathrm{Re}\left\{RIe^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$, och därmed $V = RI$.

Sambanden mellan komplexa strömmar och spänningar för resistans, kapacitans och induktans är alltså

$$\boxed{\begin{cases} V = RI & \text{för resistans } R \\ V = \mathrm{j}\omega L I & \text{för induktans } L \\ V = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} I & \text{för kapacitans } C \end{cases}} \tag{0.2}$$

Impedans Z

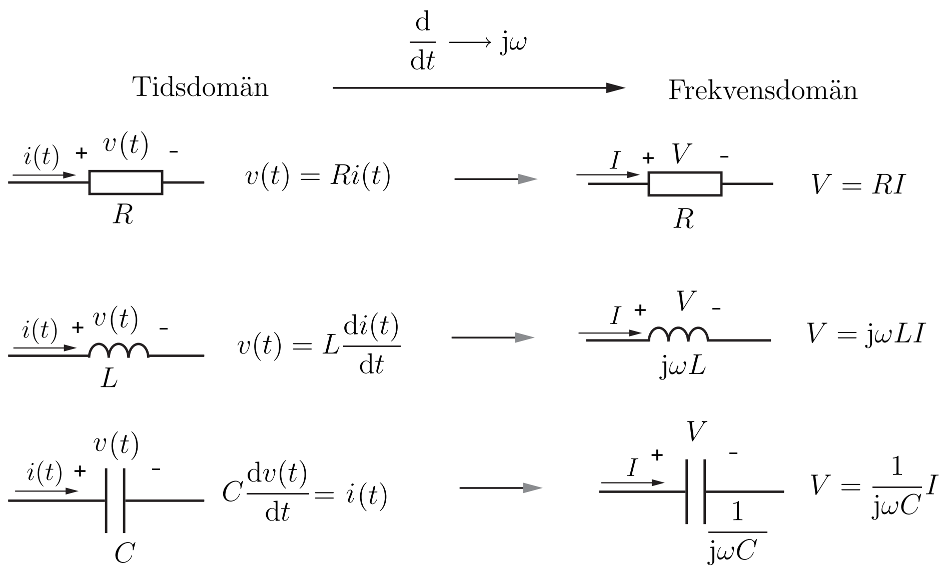
För passiva tvåpoler gäller följande linjära samband mellan den komplexa spänningen och strömmen:

$$V = ZI$$

Det komplexa talet Z kallas för impedans. Impedanserna för resistansen, induktansen och kapacitansen är, enligt (0.2)

$$\boxed{Z = \begin{cases} R & \text{resistor} \\ \mathrm{j}\omega L & \text{induktans} \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C} & \text{kapacitans} \end{cases}}$$

Strömmen skall som vanligt gå in vid + och ut vid -, som i figuren nedan



Kommentar: Reglerna för seriekoppling och parallellkoppling av resistanser gäller även för impedanser. Två seriekopplade impedanser Z_1 och Z_2 ger impedansen $Z_1 + Z_2$. Två parallellkopplade impedanser ger impedansen $Z = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. På samma sätt kommer alla andra metoder som gäller för resistiva nät också att gälla för de komplexa spänningarna och strömmarna, t.ex., nodanalys, spänningsdelning, strömgrening och Theveninekvivalenter.

jω-metoden [5.4]

- Inför komplexa spänningar och strömmar enligt transformationsregeln i ekvation (0.1)

  $$\boxed{v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi) \longrightarrow V = V_0 e^{\mathrm{j}\phi}}$$

  Notera att absolutbeloppet $|V| = V_0$ är amplituden för sinussignalen och argumentet $\arg\{V\} = \phi$ är fasvinkeln relativt $\cos \omega t$.

- Bestäm de komplexa spänningarna och strömmarna med samma metoder som för resistiva nät. Istället för Ohms lag $v = Ri$ används $V = ZI$.

- Tidsuttrycket för en spänning, eller ström, bestäms genom att först skriva den komplexa spänningen, eller strömmen, på polär form, d.v.s. $V = |V|e^{\mathrm{j}\arg\{V\}}$ eller $I = |I|e^{\mathrm{j}\arg\{I\}}$. Tidsuttrycken ges av

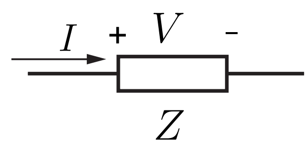
$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \mathrm{Re}\{Ve^{\mathrm{j}\omega t}\} = |V|\cos(\omega t + \arg\{V\}) \\ i(t) &= \mathrm{Re}\{Ie^{\mathrm{j}\omega t}\} = |I|\cos(\omega t + \arg\{I\}) \end{aligned}} \tag{0.3}$$

Phasors [5.2]

Hambley, och en del andra böcker, inför begreppet phasor. En phasor motsvarar den komplexa strömmen eller spänningen. Istället för att representera den tidsharmoniska signalen $v(t) = |V|\cos(\omega t+\phi)$ med det komplexa talet $V = |V|e^{j\phi}$ använder Hambley phasor-representationen $V = |V|\angle\phi$. Det markerar på ett tydligt sätt att amplituden är $|V|$ och fasen relativt $\cos\omega t$ är ϕ. Phasors är inte ett vedertaget begrepp inom andra områden av fysiken där jω-metoden används. Av denna anledning används inte phasors i kursen.

Impedans, admittans, resistans och reaktans [5.3]

$$\boxed{V = ZI \qquad \begin{cases} Z = R + \mathrm{j}X = \text{impedansen} \\ R = \mathrm{Re}\{Z\} = \text{resistansen} \\ X = \mathrm{Im}\{Z\} = \text{reaktansen} \end{cases}}$$

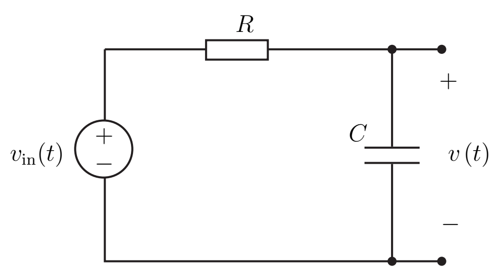


$$I = YV \qquad \begin{cases} Y = G + \mathrm{j}B = \text{admittansen} \\ G = \mathrm{Re}\{Y\} = \text{konduktansen} \\ B = \mathrm{Im}\{Y\} = \text{susceptansen} \end{cases}$$

Begreppen impedans, resistans och reaktans är mycket vanliga och dessa skall alla kunna.

Exempel: RC krets med tidsharmonisk källa

RC-kretsen till höger drivs av spänningskällan med $v_{\mathrm{in}}(t) = V_0\cos(\omega t)$.
Bestäm spänningen $v(t)$ som funktion av tiden.



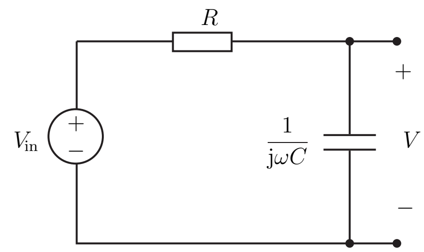
Lösning
Vi använder jω-metoden för att bestämma spänningen. Metoden kan delas upp i tre steg

1: Transformation till frekvensdomänen

Spänningarna $v_{\text{in}}(t)$ och $v(t)$ motsvaras i frekvensdomänen av V_{in} och V där

$$v_{\text{in}}(t) = \text{Re}\{V_{\text{in}}\text{e}^{\text{j}\omega t}\} = V_0\cos(\omega t) = \text{Re}\{V_0\text{e}^{\text{j}\omega t}\} \to V_{\text{in}} = V_0$$
$$v(t) = \text{Re}\{V\text{e}^{\text{j}\omega t}\} \to V$$

Kretsschemat i frekvensdomänen ges i figuren till höger. Observera att vi skriver ut impedansen $\dfrac{1}{\text{j}\omega\text{C}}$ för kapacitansen.



2: Bestämning av den komplexa spänningen V.
Spänningsdelning i frekvensdomänen ger

$$V = V_0\frac{\frac{1}{\text{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\text{j}\omega C}} = V_0\frac{1}{1+\text{j}\omega RC}$$

Den komplexa spänningen skrivs på polär form för att kunna transformeras tillbaka till tidsdomänen (se häftet om komplexa tal)

$$V = \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\text{e}^{-\text{j}\arctan(\omega RC)}$$

3: Transformation tillbaka till tidsdomänen.
Den tidsberoende spänningen ges, enligt regeln (0.3), av:

$$\begin{aligned} v(t) &= \text{Re}\{V\text{e}^{\text{j}\omega t}\} = \text{Re}\{\frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\text{e}^{-\text{j}\arctan(\omega RC)}\text{e}^{\text{j}\omega t}\} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\text{Re}\{\text{e}^{\text{j}(\omega t-\arctan(\omega RC))}\} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t-\arctan(\omega RC)) \end{aligned}$$

Vi kan snabba upp punkt 3 genom att utnyttja att en komplex spänning $V = |V|\text{e}^{\text{j}\phi}$ ger den tidsberoende spänningen $v(t) = |V|\cos(\omega t+\phi)$. Absolutbeloppet av V är $|V| = \frac{V_0}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$ och argumentet är $\phi = -\arctan(\omega RC)$.

Observera att det är viktigt att kunna transformera komplexa tal från rektangulär till polär form. Känner du dig osäker på detta bör du repetera det som står i häftet om komplexa tal.

Imaginärdelskonventionen (kursivt)

När man transformerar mellan tids- och frekvensplanet med regeln i ekvation (0.3) använder man den så kallade realdelskonventionen. Om en given ström eller spänning har tidsberoendet $\sin\omega t$ kan man i stället ha $\sin\omega t$ som riktfas. Denna konvention kallas **imaginärdelskonventionen** och ges av

$$v(t) = \mathrm{Im}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \quad \text{och} \quad i(t) = \mathrm{Im}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

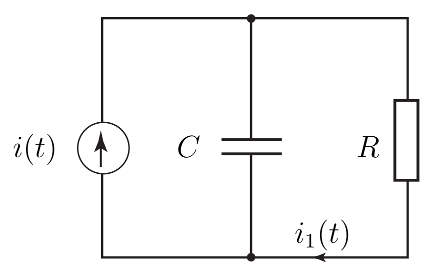
där V och I är komplexvärderna till ögonblicksvärdena $v(t)$ och $i(t)$. Tidssignalen $v(t) = V_0\sin(\omega t + \phi)$ transformeras på följande sätt:

$$v(t) = \mathrm{Im}\{V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0\sin(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}\{V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}\} = \mathrm{Im}\{V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \longrightarrow V = V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

Real- och imaginärdelskonventionen skiljer sig endast åt vid tranformationen mellan tids- och frekvensplanet. *Kommentar:* Hambley använder endast realdelskonventionen.

Exempel

Bestäm strömmen $i_1(t)$ då $i(t) = I_0\sin(\omega t + \phi)$.



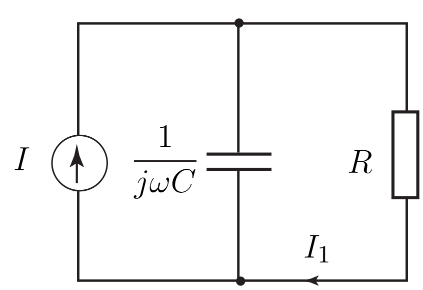
Lösning

Vi använder jω-metoden för att bestämma strömmen. Detta sker i tre steg

1: Transformation till frekvensdomänen (jω-domänen eller jω-planet). Imaginärdelskonventionen ger strömmarna i frekvensdomänen

$$i(t) = \mathrm{Im}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = I_0\sin(\omega t + \phi) = \mathrm{Im}\{I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}\} = \mathrm{Im}\{I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \rightarrow I = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$
$$i_1(t) = \mathrm{Im}\{I_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \rightarrow I_1$$

Den ekvivalenta frekvensdomänkretsen ges i figuren till höger.



2: Beräkning av strömmen i frekvensdomänen (komplexvärden).
Strömgrening ger

$$I_1 = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} I = \frac{I}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{1 + \mathrm{j}\omega RC}$$

Den komplexa strömmen I_1 skrivs på polär form

$$I_1 = \frac{I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{1 + \mathrm{j}\omega RC} = \frac{I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\omega RC)}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi - \arctan(\omega RC))}$$

3: Transformation tillbaka till tidsdomänen.
Tidsdomänstorheterna erhålls m.h.a. Im-konventionen enligt definitionen ovan. Detta ger

$$\begin{aligned} i_1(t) = \mathrm{Im}\{I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = \mathrm{Im}\left\{ \frac{I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\phi - \arctan(\omega RC))}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \right\} &= \frac{I_0\, \mathrm{Im}\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \phi - \arctan(\omega RC))}\}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \\ &= \frac{I_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \sin(\omega t + \phi - \arctan(\omega RC)) \end{aligned}$$

Vi kan snabba upp punkt 1 och 3 genom att utnytta att en spänning $v(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$ ger, med imaginärdelskonventionen, den komplexa spänningen $V = V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ och att den komplexa strömmen $I_1 = |I_1| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arg\{I_1\}}$ ger den tidsberoende strömmen $i_1(t) = |I_1| \sin(\omega t + \arg\{I_1\})$.