

Kösystem den 1 juni 2020

Otillåtna hjälpmedel: andra personer (utom möjligtvis för att servera kaffe och så...)

Alla svar måste motiveras. Glöm inte att skriva namn och personnummer på alla blad!

Uppgift 1

Ett kösystem har två betjädnare och en buffertplats. Ankomsterna är en poissonprocess med intensitet 10 per sekund. Betjäningstiden är exponentialfördelad med intensitet 5 per sekund

- Rita en markovkedja som beskriver systemet.
- Vad är spärrsannolikheten?
- Hur lång tid tillbringar en kund som inte spärras i medeltid i systemet?
- En busy period är tiden från det att en kund kommer till ett tomt system tills systemet blir tomt igen. Vad är medellängden av en busy period för detta kösystem?
- Vad är sannolikheten att exakt en kund blir betjänad under en busy period?

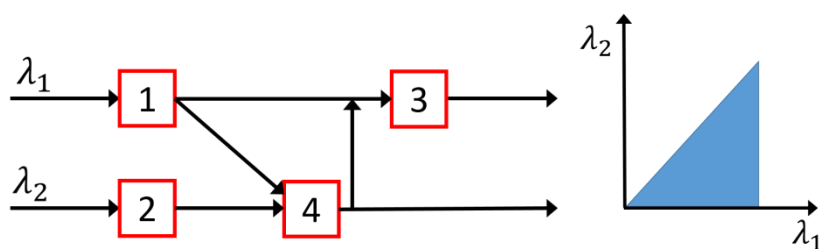
Uppgift 2

Ett kösystem har ingen buffert och tre betjädnare. Betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 1 sekund. Det finns fyra användare av systemet. En användare som inte har ett jobb under betjäning skickar ett jobb till systemet med intensiteten 1 per sekund.

- Rita tillståndsdigrammet.
- Bestäm tillståndssannolikheterna.
- Vad är sannolikheten att en kund spärras?
- Hur många kunder betjänas i medeltal under en sekund?
- Om systemet är fullt vid en viss tid, hur lång tid tar det i medel innan det blir tomt? Ankomsterna fortsätter som vanligt.

Uppgift 3

Varje fyrkant i figuren nedan är ett M/M/1-system. Ankomsterna till könätet är poissonprocesser.

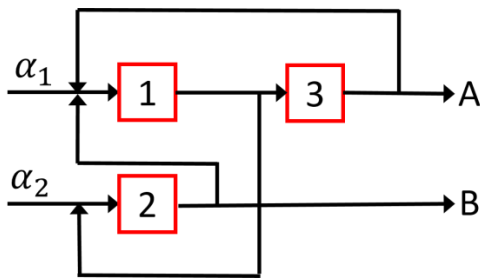


$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \mu_1 = 4, \mu_2 = 4, \mu_3 = 6, \mu_4 = 8, p_{13} = 0.5$ och $p_{43} = 0.5$

- Beräkna medelantal kunder i varje M/M/1-system.
- Vad är medeltiden i könätet för en godtycklig kund?
- Vad är medeltiden i könätet för någon som lämnar det via kösystem 4?
- Vad blir medelantal kunder i kösystem 2-4 om $\lambda_1 \rightarrow \infty$?
- För vilka värden på λ_1 och λ_2 är könätet stabilt? Rita ett diagram av typ det till höger om könätet ovan. Det område där stabilitet råder ska vara tydligt markerat.

Uppgift 4

Ett könät ser ut så här:



$$\alpha_1 = 12, \alpha_2 = 8, \mu_1 = 36, \mu_2 = 28, \mu_3 = 20, p_{13} = 0.5, p_{31} = 0.5 \text{ och } p_{21} = 0.5$$

Ankomsterna är poissonprocesser och betjäningstiderna är exponentialfördelade.

- Vad blir medelantal kunder i könätet?
- Vad blir medeltiden i könätet för en godtycklig kund?
- I medeltal, hur många gånger betjänas en godtycklig kund under sin tid i könätet?
- Vad blir medeltiden i könätet för kunder som kommer till könätet via kösystem 1?
- Vad är sannolikheten att en kund som kommer till könätet via kösystem 2 lämnar könätet vid A?

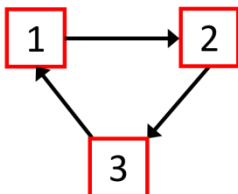
Uppgift 5

Ett kösystem har en oändlig buffert och en betjänare. Ankomsterna är en poissonprocess med intensitet λ . Betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 1 sekund. Efter varje betjäning måste betjänan återhämta sig exakt en sekund innan en ny kund kan börja betjänas. Betjänan kan alltså vara ledig, den kan betjäna en kund eller den kan vila.

- Vad är sannolikheten att betjänan är ledig som funktion av λ ? Rita en graf för $0 \leq \lambda < \infty$.
- Vad är sannolikheten att betjänan vilar som funktion av λ ? Rita en graf för $0 \leq \lambda < \infty$.
- Hur stort kan λ vara utan att antalet kunder i systemet går mot oändligheten?
- I medeltal, hur många kunder finns det i bufferten om $\lambda = 0.4$? Ett tips: $V(X + 1) = V(X)$.
- I medeltal, hur lång tid tillbringar en kund i kösystemet om $\lambda = 0.4$?

Uppgift 6

Ett könät består av tre kösystem, se figuren nedan. Inget av kösystemen har någon buffert. Alla kösystemen har 1000 betjänare. Betjäningstiden i kösystem k är exponentialfördelad med intensitet $\mu_k = k$. Det finns 100 kunder i könätet och kunder kan varken komma till könätet eller lämna det.



- Vilken relation måste råda mellan antalet ankomster till ett kösystem per tidsenhet och antalet som betjänas i kösystemet per tidsenhet i detta könät? Varför?
- Vad är medelantal kunder i kösystem 1, 2 respektive 3?
- Vad är sannolikheten att kösystem 1 innehåller m kunder?