Kösystem den 3 juni 2019

Tillåtna hjälpmedel: utdelad formelsamling, allmän formelsamling, räknedosa. Alla svar måste motiveras om inget annat sägs.

Uppgift 1

Ett kösystem har två betjänare och två buffertplatser. Ankomsterna är en poissonprocess med intensiteten 10 s^{-1} och betjäningstiden är exponentialfördelad med medelvärdet 0.2 s.

a) Rita tillståndsdiagrammet.
b) Hur många kunder betjänas i medeltal per sekund?
c) Hur lång tid tillbringar i medeltal en kund som inte spärras i kösystemet?
d) En busy period börjar när det kommer en kund till ett tomt kösystem och slutar när kösystemet för första gången blir tomt därefter. Beräkna medellängden av en busy period för detta kösystem.

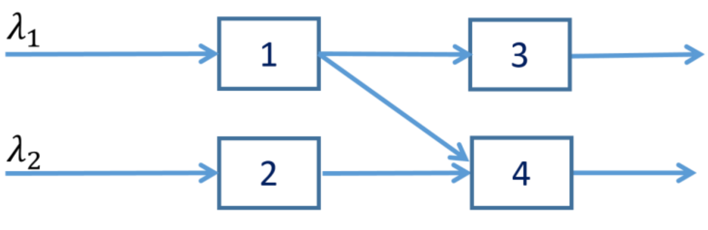
Uppgift 2

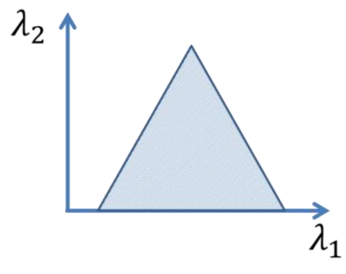
Ett kösystem har tre kunder. En kund som inte finns i kösystemet har ankomstintensiteten 1 s^{-1} (poissonprocess). Det finns en betjänare och två buffertplatser. Betjäningstiden är exponentialfördelad med intensiteten 2 s^{-1}. En kund som finns i bufferten lämnar den med intensiteten 2 s^{-1} på grund av otålighet.

a) Rita tillståndsdiagrammet.
b) Vad är medelantal kunder i kösystemet?
c) En kund lämnar kösystemet. Vad är sannolikheten att den har blivit betjänad? (Det vill säga den har inte lämnat kösystemet på grund av otålighet i bufferten)
d) Hur lång tid tillbringar en kund i medel i systemet om den blir betjänad?

Uppgift 3

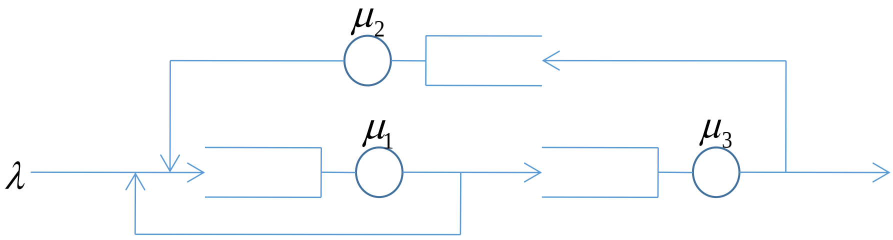
Figuren nedan till vänster visar ett könät. Boxarna är M/M/1-köer. Betjäningsintensiteten i noderna är: $\mu_1 = 4\ \mathrm{s}^{-1}$, $\mu_2 = 3\ \mathrm{s}^{-1}$, $\mu_3 = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ och $\mu_4 = 3\ \mathrm{s}^{-1}$. När en kund lämnar nod 1 så fortsätter den med sannolikheten 0,5 till nod 3 och med sannolikheten 0,5 till nod 4. I deluppgift a, b och c förutsätter vi att alla noder är stabila. λ_1 och λ_2 ska ingå i svaret.





a) Beräkna medelantal kunder i var och en av noderna.
b) Beräkna medeltiden som en godtycklig kund tillbringar i könätet.
c) Beräkna medeltiden som en kund som kommer till könätet via nod 1 tillbringar i könätet.
d) Rita området i (λ_1, λ_2)-planet där alla noder i könätet är stabila på liknande sätt som i figuren till höger om könätet.

Uppgift 4



I könätet ovan är $\lambda = 10$, $\mu_1 = 50$, $\mu_2 = 12$, $\mu_3 = 30$. Sannolikheten att en kund som lämnar nod 1 fortsätter till nod 3 är 0.5 och sannolikheten att en kund som lämnar nod 3 fortsätter till nod 2 är 0.5.

a) Vad är medeltiden i könätet för en kund?
b) Vad är medelvärdet för tiden mellan ankomster till nod 2?
c) I medeltal, hur många gånger besöker en kund nod 1, 2 respektive 3 under sin tid i könätet?
d) Vad är medelvärdet av den totala betjäningstiden i nätet för en kund?

Uppgift 5

Ett M/G/1-system har en betjäningstid som är likformigt fördelad mellan 0 och 2, dvs täthetsfunktionen för betjäningstiden är

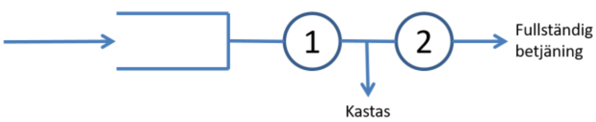
$$f_X(t) = \begin{cases} 0.5 \text{ då } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \text{ för övrigt} \end{cases}$$

Ankomstintensiteten är 0.8.

a) Vad blir medeltiden för en kund i systemet?
b) Vad är sannolikheten att betjänaren är upptagen?
c) Vad är medeltiden i bufferten för en kund som kommer till systemet när betjänaren är upptagen?
d) En busy period börjar när en kund kommer till ett tomt system och slutar när systemet blir tomt nästa gång. Beräkna medelantal kunder som betjänas under en busy period.

Uppgift 6

Ett kösystem består av två betjänare och en buffert. När en kund betjänas så får den först betjäning i betjänare 1 och därefter i betjänare 2. Om betjänare 2 är upptagen när en betjäning är klar i betjänare 1 så kastas kunden som har betjänats i betjänare 1 (se figur). Ankomsterna till kösystemet är en poissonprocess med intensitet λ och betjäningsintensiteten är μ_1 i betjänare 1 och μ_2 i betjänare 2 (exponentialfördelade).



a) Bufferten har oändligt många platser. Vilken relation ska råda mellan λ, μ_1 och μ_2 för att systemet ska vara stabilt? Motivera svaret!

I fortsättningen antar vi att det ***inte*** finns några buffertplatser framför betjänarna.

b) Definiera tillstånd och rita en markovkedja som beskriver systemet.
c) Om $\lambda = \mu_1 = \mu_2$, hur många kunder per tidsenhet blir då kastade efter betjänare 1?
d) Om $\lambda = \mu_1 = \mu_2$, vad är sannolikheten att en kund som inte spärras får fullständig betjäning, det vill säga får betjäning i både betjänare 1 och 2?