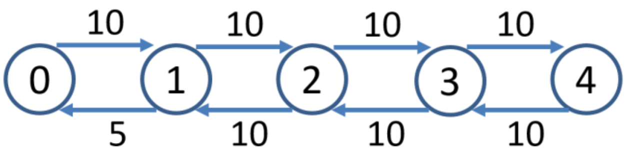
Svar till Kösystem den 3 juni 2019

Uppgift 1

a)



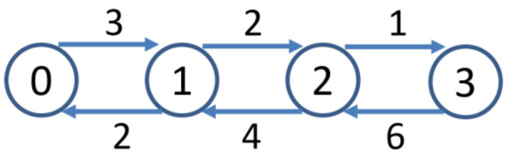
b) Snittmetoden ger: $p_0 = \frac{1}{9}$ och $p_k = \frac{2}{9}$ för $k = 1, 2,3,4$. Man kan beräkna antalet som betjänas per tidsenhet på två sätt:
$10 \cdot (p_4 + p_3 + p_2) + 5 \cdot p_1 = \frac{70}{9} \approx 7{,}8$ eller som $10(1 - p_4)$ vilket har samma värde.

c) $E(N) = \sum_{k=1}^{4} kp_k = \frac{20}{9}$ och $\lambda_{eff} = \frac{70}{9}$ ger $E(T) = \frac{E(N)}{\lambda_{eff}} = \frac{2}{7} \approx 0{,}29$

d) Låt $Y =$ längden av en busy period. Tiden mellan två busy periods har medelvärdet λ^{-1}. Det ger
$p_0 = \frac{\lambda^{-1}}{\lambda^{-1}+E(Y)} \Rightarrow E(Y) = 0{,}8$ eftersom $\lambda^{-1} = 0{,}1$.

Uppgift 2

a)



b) Snittmetoden ger
$p_0 = 8/27$
$p_1 = 12/27$
$p_2 = 6/27$
$p_3 = 1/27$
Medelantal kunder blir då
$E(N) = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 = 1$

c) $\lambda_{betj} = 2(1 - p_0) = \frac{38}{27}$ och $\lambda_{otålig} = 2 \cdot p_2 + 4 \cdot p_3 = \frac{16}{27}$. Den efterfrågade sannolikheten blir då

$$\frac{\lambda_{betj}}{\lambda_{betj} + \lambda_{otålig}} = \frac{38}{54} \approx 0.7$$

d) Sätt $p_k^A =$ sannolikheten att en kund som har blivit betjänad kom in i systemet när det fanns k kunder i det. Dessa sannolikheter är:

$$p_0^A = \frac{3p_0}{3p_0 + 2p_1 + p_2} = \frac{4}{9}$$
$$p_1^A = \frac{2p_1}{3p_0 + 2p_1 + p_2} = \frac{4}{9}$$
$$p_2^A = \frac{p_2}{3p_0 + 2p_1 + p_2} = \frac{1}{9}$$

Den sökta tiden blir då:

$$\frac{1}{2} \cdot p_0^A + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot p_1^A + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot p_2^A = \frac{71}{108} \approx 0{,}66$$

Uppgift 3

a) Den vanliga formeln för M/M/1 ger:

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{4 - \lambda_1}$$
$$E(N_2) = \frac{\lambda_2}{3 - \lambda_2}$$
$$E(N_3) = \frac{0{,}5 \cdot \lambda_1}{2 - 0{,}5 \cdot \lambda_1}$$
$$E(N_4) = \frac{\lambda_2 + 0{,}5 \cdot \lambda_1}{3 - \lambda_2 - 0{,}5 \cdot \lambda_1}$$

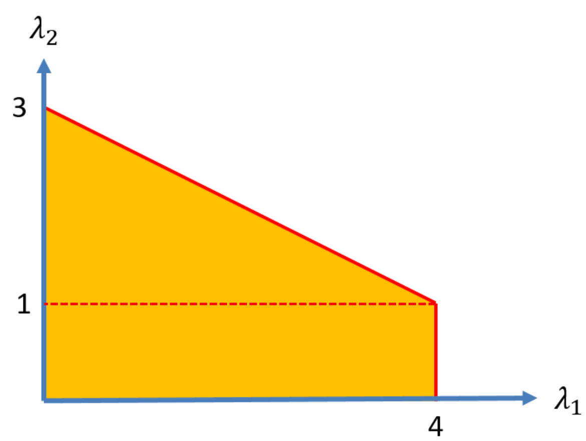
b) Enligt Littles sats blir det:

$$\frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3) + E(N_4)}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

c) Sammanvägning av de två möjliga rutterna ger:

$$\frac{N_1}{\lambda_1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_3}{\lambda_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{N_4}{\lambda_4}$$

d) Området ser ut så här:



Uppgift 4

a) Ankomstintensiteterna till noderna blir:

$$\lambda_1 = 40$$
$$\lambda_2 = 10$$
$$\lambda_3 = 20$$

Det ger att:

$$E(N_1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = 4$$
$$E(N_2) = 5$$
$$E(N_3) = 2$$

Littles sats ger slutligen:

$$E(T) = \frac{E(N_1) + E(N_2) + E(N_3)}{\lambda} = 1{,}1$$

b) $\lambda^{-1} = 0{,}1$

c) 4, 1 respektive 2 gånger (blir λ_k/λ för nod k).

d) Resultatet från deluppgift c ger:

$$4 \cdot \frac{1}{\mu_1} + 1 \cdot \frac{1}{\mu_2} + 2 \cdot \frac{1}{\mu_3} = 0{,}23$$

Uppgift 5

a) Först beräknar vi betjäningstidens medelvärde och andramoment. Enklast med vanliga integraler:

$$E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} dx = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} dx = \frac{4}{3}$$

Det ger $\rho = \lambda E(X) = 0{,}8$.

Insättning i Pollaczek–Khinchines formel ger sedan

$$E(T) = E(X) + \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\rho)} = \frac{11}{3} \approx 3{,}7$$

b) $\rho = 0{,}8$

c) $E(T) = E(T|upptagen) \cdot P(upptagen) + E(T|ej\ upptagen) \cdot P(ej\ upptagen) = E(T|upptagen) \cdot 0{,}8 + E(X) \cdot 0{,}2 = E(T|upptagen) \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}2$

Nu vet vi vad $E(T)$ är från uppgift a, så då får vi:

$$E(T|upptagen) = \frac{E(T) - 0{,}2}{0{,}8} = \frac{13}{3}$$

Det var medeltiden i bufferten för kunder som måste vänta som det frågades efter så svaret blir:

$$E(T|upptagen) - E(X) = \frac{10}{3} \approx 3{,}3$$

d) Medellängden av en busy period är:

$$\frac{E(X)}{1-\rho} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

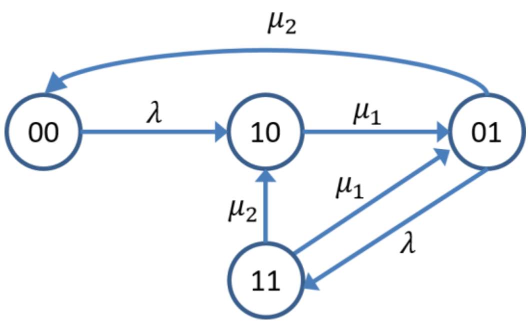
Medelantal som betjänas blir då:

$$\frac{5}{E(X)} = 5$$

Uppgift 6

a) $\lambda < \mu_1$, värdet på μ_2 spelar ingen roll.

b) Markovkedjan ser ut så här:



c) Flöde-in = Flöde-ut ger ekvationerna:

$$\lambda p_{00} = \mu_2 p_{01}$$
$$\mu_1 p_{10} = \mu_2 p_{11} + \lambda p_{00}$$
$$(\lambda + \mu_2) p_{01} = \mu_1 p_{10} + \mu_1 p_{11}$$
$$(\mu_1 + \mu_2) p_{11} = \lambda p_{01}$$

Att summan av alla sannolikheter ska vara = 1 ger lösningen:

$$\begin{cases} p_{00} = 2/8 \\ p_{01} = 2/8 \\ p_{10} = 3/8 \\ p_{11} = 1/8 \end{cases}$$

Antal som kastas per tidsenhet blir då

$$p_{11} \cdot \mu_1 = \frac{1}{8}$$

d) Det blir antal som betjänas i betjänare två per tidsenhet dividerat med antal kunder som får komma in i systemet per tidsenhet, vilket är:

$$\frac{\mu_2 p_{01} + \mu_2 p_{11}}{\lambda p_{00} + \lambda p_{01}} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$