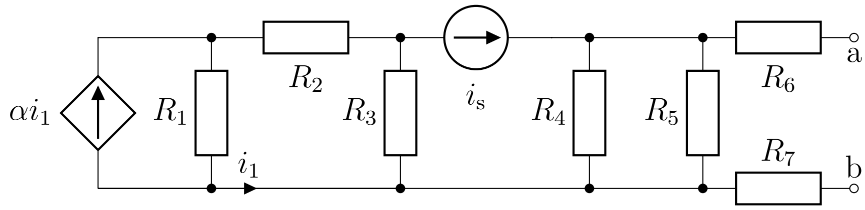
Tentamen i EITF90 Ellära och elektronik, 2/6 2020

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori. Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

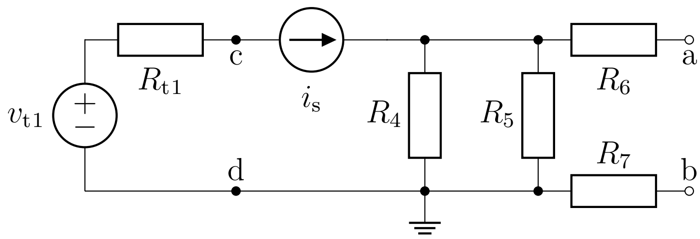
1



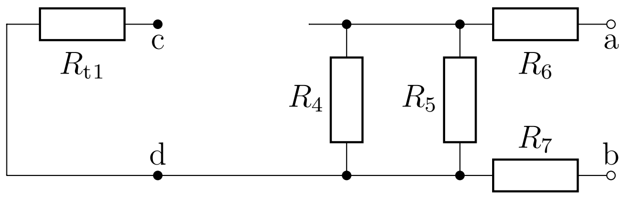
- Bestäm Theveninekvivalentens inre resistans R_t med avseende på nodparet ab.
- Bestäm Theveninekvivalentens spänning v_t med avseende på nodparet ab.

Lösning

Kretsen till vänster om strömkällan påverkar inte strömmar och spänningar vid ab (inses till exempel genom att ersätta kretsen till vänster om cd med en Thevininekvivalent



Nollställ källorna



$$R_{ab} = R_6 + R_7 + R_4 // R_5 = R_6 + R_7 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

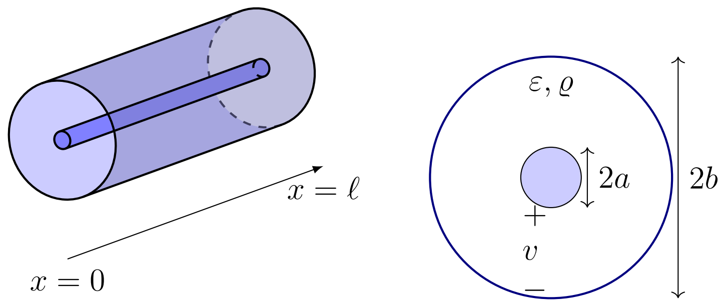
Tomgångsspänningen ges av en parallellkoppling eller KCL

$$-i_s + \frac{v_{ab} - 0}{R_4} + \frac{v_{ab} - 0}{R_5} = 0 \Rightarrow v_{ab} = i_s \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

Svar:

$$R_{ab} = R_6 + R_7 + \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} \quad \text{och } v_{ab} = i_s \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5}$$

2



En transmissionsledning består av en koaxialkabel med längd ℓ, radie a på innerledaren, radie b på ytterledaren. Materialet mellan ledarna består av ett material med permittivitet ε, resistivitet ϱ och permeabilitet $\mu = \mu_0$.

(a) Bestäm (full härledning) resistansen mellan inner- och ytterledaren för en koaxialkabel med längd ℓ.

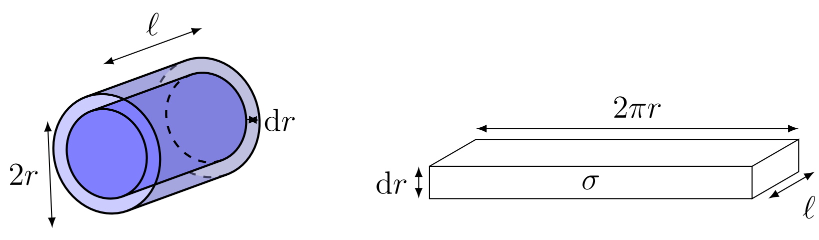
(b) Bestäm (full härledning) kapacitansen mellan inner- och ytterledaren för en koaxialkabel med längd ℓ.

(c) En (ideal) spänningskälla var inkopplad mellan inner- och ytterledaren för $t < 0$ så att Spänningen $v(t)$ mellan inner och ytterledaren är V_0. Källan kopplas bort (stängs av) vid tiden $t = 0$. Bestäm spänningen $v(t)$ för $t \geq 0$ och beräkna spänningen vid tiden $t_1 = 1\,\mathrm{s}$.

Använd $V_0 = 100\,\mathrm{V}$, $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F/m}$ och $\varrho = 10^{12}\,\Omega\mathrm{m}$ för att beräkna $v(t_1)$.

Lösning

(a) Dela upp volymen mellan ledarna i skikt med (infinitesimal) tjocklek $\mathrm{d}r$ och tvärsnittsyta $2\pi r\ell$. Skikten kan vecklas ut till rätblock



- Ett tunt skikt med tjocklek $\mathrm{d}r$ och tvärsnittsyta $2\pi r\ell$ har resistans (rätblock)

$$\mathrm{d}R = \frac{\varrho\,\mathrm{d}r}{2\pi r\ell}$$

- Skikten är seriekopplade (gemensam ström)
- Integrera (summera) för den total resistansen

$$R = \int \mathrm{d}R = \int_a^b \frac{\varrho\,\mathrm{d}r}{2\pi r\ell} = \frac{\varrho}{2\pi\ell}\left[\ln r\right]_a^b = \frac{\ln(b/a)\varrho}{2\pi\ell}$$

(b) Dela upp området mellan ledarna i cylindriska skal med infinitesimal tjocklek $\mathrm{d}r_\mathrm{c}$. Skalens kapacitans ges av plattkondensatorapproximationen med invers

$$\mathrm{d}(C^{-1}) = \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{\varepsilon\ell 2\pi r_\mathrm{c}}$$

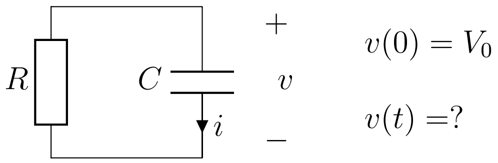
Skalen är seriekopplade så inversen av den totala kapacitansen ges av integralen

$$C^{-1} = \int \mathrm{d}(C^{-1}) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{\varepsilon\ell 2\pi r_\mathrm{c}} = \frac{1}{\varepsilon\ell 2\pi}\left[\ln r_\mathrm{c}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\varepsilon\ell 2\pi}\ln(r_2/r_1)$$

Kapacitans

$$C = \frac{\ell\varepsilon 2\pi}{\ln(b/a)}$$

(c) Vi kan modellera kabeln med en RC krets



med $R = \frac{\ln(b/a)\varrho}{2\pi\ell}$ och $C = \frac{\ell\varepsilon 2\pi}{\ln(b/a)}$. KVL ger (gå medurs i kretsen)

$$-Ri(t) - v(t) = 0 \quad \overset{i(t)=C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}v(t) = 0$$

En första ordningens differentialekvation som kan lösas på många sätt tex integrerande faktor, ansats och Laplacetransform. Lösning

$$v(t) = V_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{med tidskonstanten } \tau = RC = \frac{\varrho\ln(b/a)}{2\pi\ell}\frac{\ell\varepsilon 2\pi}{\ln(b/a)} = \varrho\varepsilon$$

Svar:

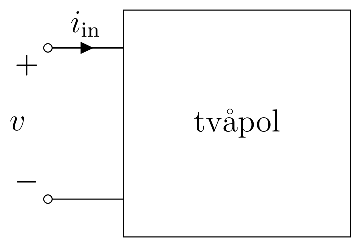
1.
$$R = \frac{\ln(b/a)\varrho}{2\pi\ell}$$

2.
$$C = \frac{\ell\varepsilon 2\pi}{\ln(b/a)}$$

3.
$$v(t) = V_0\mathrm{e}^{-t/(\varrho\varepsilon)} \quad \text{för } t \geq 0$$

3

Inuti en tvåpol finns ett motstånd med resistans R och en spole med induktans L. Om strömmen $i_\mathrm{in}(t) = I_1 + I_2\cos(\omega t)$ läggs på ingången fås en spänning $v(t) = V_0\cos(\omega t + \pi/4)$.



(a) Motivera hur R och L är kopplade till tvåpolens ingång och rita en figur,

(b) Bestäm värden på R och L. I uttrycket får I_1, I_2, V_0 och ω ingå.

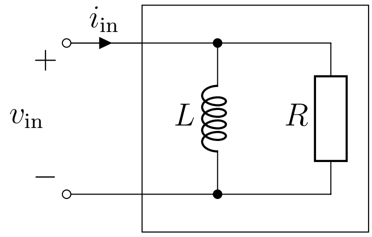
Lösning

Inströmmen består av två delar $i_{\rm in}(t) = i_{\rm DC} + i_\omega(t)$. DC ($\omega = 0$) delen stoppas (utsignalen har ingen DC komponent). Transformera $\cos(\omega t)$ delen av signalen till frekvensplanet

$$I_2 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\{I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \longrightarrow I_2$$

och

$$V_0 \cos(\omega t + \pi/4) = \mathrm{Re}\{V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\pi/4)}\} = \mathrm{Re}\{V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \longrightarrow V = V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$



Resistansen och induktansen kan vara serie- eller parallellkopplade. Eftersom DC signalen stoppas (kortsluts) är de parallellkopplade. Det kan också ses av motsvarande inimpedanser (frekvensplanet)

$$Z_{\rm s}(\omega) = R + \mathrm{j}\omega L \quad \text{och } Z_{\rm p}(\omega) = \frac{\mathrm{j}\omega RL}{R + \mathrm{j}\omega L}$$

där vi ser att DC värdena är $Z_{\rm s}(0) = R$ och $Z_{\rm p}(0) = 0$.

Vi har nu $Y = 1/Z$

$$Y_{\rm p}(\omega) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{\mathrm{j}}{\omega L} = \frac{I_{\rm in}}{V} = \frac{I_2}{I_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}} = \frac{I_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/4}}{V_0} = \frac{I_2}{V_0\sqrt{2}}(1 - \mathrm{j})$$

som ger

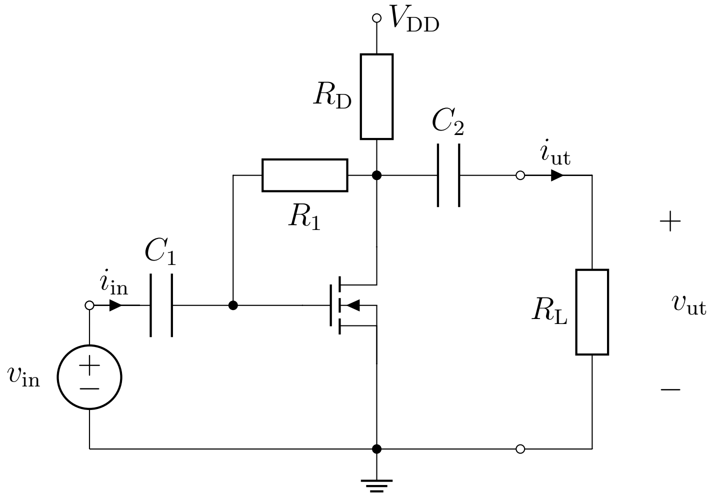
$$\frac{1}{R} = \frac{I_2}{V_0\sqrt{2}} \quad \text{och } \frac{1}{\omega L} = \frac{I_2}{V_0\sqrt{2}}$$

och svar:

$$R = \frac{V_0\sqrt{2}}{I_2} \quad \text{och } L = \frac{V_0\sqrt{2}}{I_2 \omega}$$

4

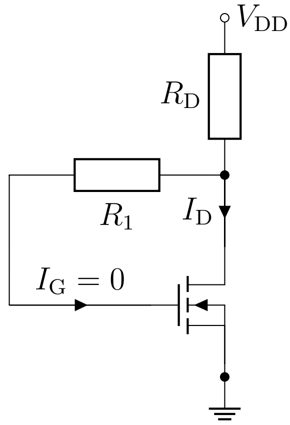
Tröskelspänningen för NMOS transistorn är $V_{\rm t} = 1\,\mathrm{V}$, $V_{\rm DD} > 4V_{\rm t}$, kapacitanserna C_1, C_2, resistanserna $R_1, R_{\rm D}$, och NMOS konstanten K är givna.



a) Bestäm i vilket arbetsområde (subtröskel, linjärt, mättnads) transistorn befinner sig i.

b) Bestäm arbetspunkten $V_{\rm GSQ}$ och $I_{\rm DQ}$

Lösning



Använd att kopplingskapacitanserna är avbrott för likström och rita om kretsen Från $I_{\mathrm{G}} = 0$ får vi $V_{\mathrm{GDQ}} = 0$ som visar att transistorn är i mättnadsområdet

$$I_{\mathrm{DQ}} = K(V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}})^2$$

KVL

$$V_{\mathrm{DD}} - I_{\mathrm{DQ}} R_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{GSQ}} = 0$$

ger

$$R_{\mathrm{D}} K(V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}})^2 = V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{GSQ}}$$

som kan skrivas

$$(V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}})^2 = \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{t}}}{K R_{\mathrm{D}}} - \frac{V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}}}{K R_{\mathrm{D}}}$$

eller

$$(V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}})^2 + \frac{V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}}}{K R_{\mathrm{D}}} - \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{t}}}{K R_{\mathrm{D}}} = 0$$

med lösning

$$V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}} = -\frac{1}{2K R_{\mathrm{D}}} + \sqrt{\frac{1}{4K^2 R_{\mathrm{D}}^2} + \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{t}}}{R_{\mathrm{D}} K}}$$

där vi använt $V_{\mathrm{GSQ}} - V_{\mathrm{t}} \geq 0$.

Svar:

$$V_{\mathrm{GSQ}} = V_{\mathrm{t}} - \frac{1}{2K R_{\mathrm{D}}} + \frac{\sqrt{1 + 4K R_{\mathrm{D}}(V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{t}})}}{2K R_{\mathrm{D}}} \quad \text{och } I_{\mathrm{DQ}} = \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{GSQ}}}{R_{\mathrm{D}}}$$

5

Man kan bestämma den karakteristiska impedansen och vågtalet i en koaxialkabel genom att mäta inimpedansen i kabelns ena ände när den andra änden avslutas med en last R_{L}.

- Amplituden av inimpedansen med en kortsluten koaxialkabel ($R_{\mathrm{L}} = 0$) mäts till $|Z_{\mathrm{sh}}|$
- Amplituden av inimpedansen för öppen koaxialkabel ($R_{\mathrm{L}} = \infty$) mäts till $|Z_{\mathrm{op}}|$

Antag att koaxialkabeln har längd ℓ och att materialet mellan en koaxialkabels inner och ytterledare har relativ permittiviteten ε_{r} och permeabilitet μ_0. Inimpedansen mäts vid en frekvens $f < c/(\ell 4)$ där c betecknar vågutbredningshastigheten i kabeln.

a) Bestäm den karakteristiska impedansen Z_0 för koaxialkabeln.

b) Bestäm den relativa permittiviteten ε_{r} om $|Z_{\mathrm{sh}}| = |Z_{\mathrm{op}}|$.

Lösning

a) För en koaxialkabel med karakteristiska impedansen Z_0 ges inimpedansen av

$$Z(0) = Z_0 \frac{1 + \mathit{\Gamma} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 - \mathit{\Gamma} \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}, \quad \text{där} \quad \mathit{\Gamma} = \frac{Z_\mathrm{L} - Z_0}{Z_\mathrm{L} + Z_0}$$

Då ledningen är kortsluten gäller $Z_\mathrm{L} = 0 \Rightarrow \mathit{\Gamma} = -1$, och därmed

$$Z_\mathrm{sh} = Z_0 \frac{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}} = \mathrm{j} Z_0 \tan(\beta\ell)$$

Då ledningen är öppen gäller $Z_\mathrm{L} = \infty \Rightarrow \mathit{\Gamma} = 1$, vilket ger

$$Z_\mathrm{op} = Z_0 \frac{1 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}}{1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell}} = \frac{-\mathrm{j} Z_0}{\tan(\beta\ell)}$$

Z_0 ges av produkten av Z_sh och Z_op,

$$Z_0 = \sqrt{|Z_\mathrm{sh}||Z_\mathrm{op}|}$$

b) Vågtalet β fås av

$$|\tan(\beta\ell)| = 1/|\tan(\beta\ell)| \Rightarrow \tan(\beta\ell) = \pm 1 \Rightarrow \beta\ell = \pm\frac{\pi}{4} + m\pi \quad \text{med } m = .., -1, 0, 1..$$

Vågtalet $\beta = 2\pi/\lambda = 2\pi n/\lambda_0 = 2\pi n f/c_0$ så

$$\varepsilon_\mathrm{r} = n^2 = \left(\frac{c_0\beta}{2\pi f}\right)^2 = \left(\frac{c_0}{8f\ell}\right)^2 = \left(\frac{\lambda_0}{8\ell}\right)^2 \tag{1}$$

där vi använt

$$f < c/(4\ell) \Rightarrow \beta\ell < \pi/2 \Rightarrow m = 0$$

<u>Svar:</u>

$$Z_0 = \sqrt{|Z_\mathrm{sh}||Z_\mathrm{op}|} \quad \text{och } \varepsilon_\mathrm{r} = n^2 = \left(\frac{c_0}{8f\ell}\right)^2$$

Lösning med försluster

a) För en koaxialkabel med karakteristiska impedansen Z_0 ges inimpedansen av

$$Z(0) = Z_0 \frac{Z_\mathrm{L} \cosh(\gamma\ell) + Z_0 \sinh(\gamma\ell)}{Z_0 \cosh(\gamma\ell) + Z_\mathrm{L} \sinh(\gamma\ell)}$$

Då ledningen är kortsluten gäller $Z_\mathrm{L} = 0$, och därmed

$$Z_\mathrm{sh} = Z_0 \frac{\sinh(\gamma\ell)}{\cosh(\gamma\ell)} = Z_0 \tanh(\gamma\ell)$$

Då ledningen är öppen gäller $Z_\mathrm{L} \to \infty$, vilket ger

$$Z_\mathrm{op} = Z_0 \frac{\cosh(\gamma\ell) + Z_0/Z_\mathrm{L} \sinh(\gamma\ell)}{Z_0/Z_\mathrm{L} \cosh(\gamma\ell) + \sinh(\gamma\ell)} \to Z_0 \frac{\cosh(\gamma\ell)}{\sinh(\gamma\ell)} = Z_0/\tanh(\gamma\ell)$$

Z_0 ges av produkten av Z_sh och Z_op,

$$Z_0 = \sqrt{|Z_\mathrm{sh}||Z_\mathrm{op}|}$$

b) Om $|Z_{\mathrm{sh}}| = |Z_{\mathrm{op}}|$ så är $|\tanh(\gamma\ell)| = 1/|\tanh(\gamma\ell)|$. Insättning av $\gamma = \alpha + \mathrm{j}\beta$ ger $|\tanh(\alpha\ell + \mathrm{j}\beta\ell)|^2 = 1$. Detta kan skrivas om med en additionsformel för tangens hyperbolicus till

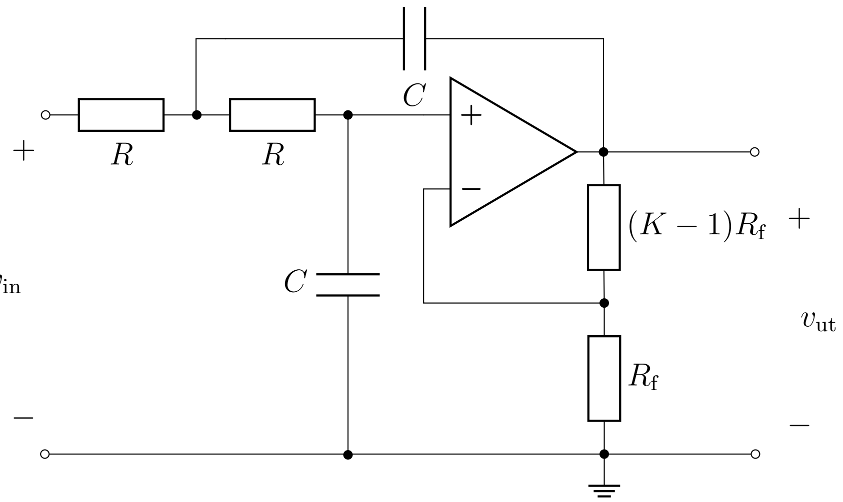
$$\left|\frac{\tanh(\alpha\ell) + \tanh(\mathrm{j}\beta\ell)}{1 + \tanh(\alpha\ell)\tanh(\mathrm{j}\beta\ell)}\right|^2 = 1 \Rightarrow \left|\frac{\tanh(\alpha\ell) + \mathrm{j}\tan(\beta\ell)}{1 + \mathrm{j}\tanh(\alpha\ell)\tan(\beta\ell)}\right|^2 = 1$$

Täljare och nämnare är nu på form $a + \mathrm{j}b$ vilket ger

$$\begin{aligned}\frac{\tanh^2(\alpha\ell) + \tan^2(\beta\ell)}{1 + \tanh^2(\alpha\ell)\tan^2(\beta\ell)} = 1 &\Rightarrow \tanh^2(\alpha\ell) + \tan^2(\beta\ell) = 1 + \tanh^2(\alpha\ell)\tan^2(\beta\ell)\\ &\Rightarrow \tan^2(\beta\ell)\left(1 - \tanh^2(\alpha\ell)\right) + \tanh^2(\alpha\ell) - 1 = 0\\ &\Rightarrow \left(1 - \tanh^2(\alpha\ell)\right)\left(\tan^2(\beta\ell) - 1\right) = 0\end{aligned}$$

Det måste alltså gälla att $\tanh^2(\alpha\ell) = 1$ eller $\tan^2(\beta\ell) = 1$. För tangens hyperbolicus gäller att $-1 < \tanh(x) < 1$ så $\tanh^2(\alpha\ell) = 1$ kan därmed aldrig gälla. Då måste det gälla att $\tan^2(\beta\ell) = 1$ och utifrån detta fås samma lösning som i det förlustfria fallet.

6

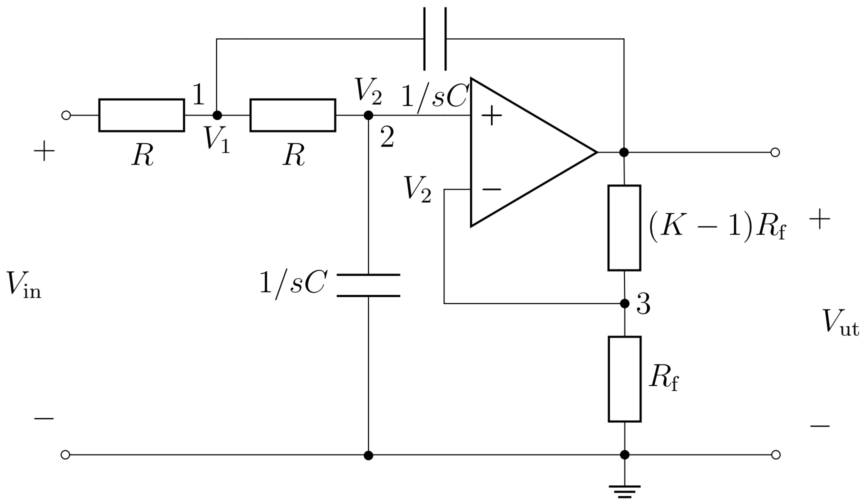


Operationsförstärkaren kan anses vara ideal och kondensatorerna är oladdade vid tiden $t = 0$.

a) Bestäm överföringsfunktionen $H(s) = V_{\mathrm{ut}}(s)/V_{\mathrm{in}}(s)$ där $V_{\mathrm{ut}}(s) = \mathcal{L}\{v_{\mathrm{ut}}(t)\}$ och $V_{\mathrm{in}}(s) = \mathcal{L}\{v_{\mathrm{in}}(t)\}$.

b) Rita Bodediagrammet (rätlinjeapproximationen (amplitud och fas)) för $H(\mathrm{j}\omega)$ och bestäm brytfrekvensen.

Lösning



För in nodpotentialer V_1 och V_2 och använd KCL på nod 3

$$\frac{V_2-0}{R_\mathrm{f}}+\frac{V_2-V_\mathrm{ut}}{(K-1)R_\mathrm{f}} \Rightarrow V_\mathrm{ut}=KV_2$$

(alternativt använd att strömmen är gemensam). KCL på nod 2 (spänningsdelning)

$$\frac{V_2-V_1}{R}+sC(V_2-0)=0 \Rightarrow V_2=\frac{1/sC}{R+1/sC}V_1=\frac{1}{1+sRC}V_1 \Rightarrow V_\mathrm{ut}=\frac{K}{1+sRC}V_1$$

KCL på nod 1

$$\frac{V_1-V_\mathrm{in}}{R}+\frac{V_1-V_\mathrm{ut}}{1/sC}+\frac{V_1-0}{R+1/sC}=0 \Rightarrow V_1\left(1+sRC+\frac{sRC}{1+sRC}\right)=V_\mathrm{in}+sRCV_\mathrm{ut}$$

och med

$$\frac{V_\mathrm{ut}}{K}\left((1+sRC)^2+sRC\right)=\frac{V_\mathrm{ut}}{K}\left(1+3sRC+(sRC)^2\right)=V_\mathrm{in}+sRCV_\mathrm{ut}$$

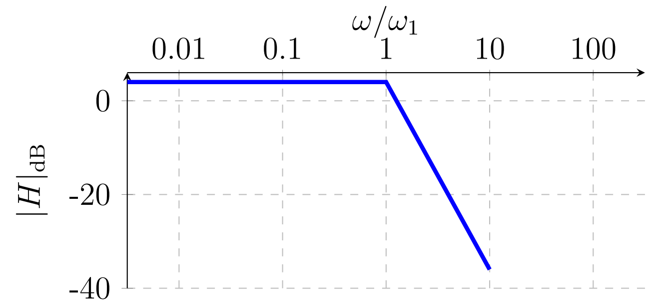
som ger

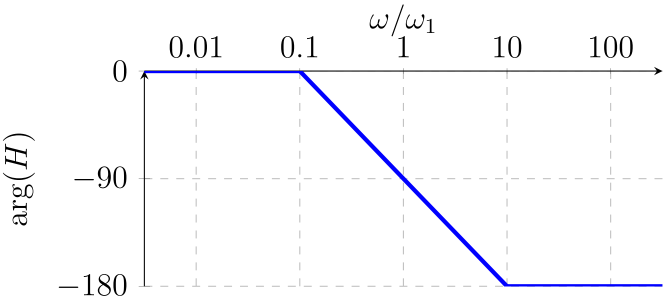
$$V_\mathrm{ut}\left(1+(3-K)sRC+(sRC)^2\right)=KV_\mathrm{in}$$

och överföringsfunktionen

$$H(s)=\frac{V_\mathrm{ut}(s)}{V_\mathrm{in}(s)}=\frac{K}{(sRC)^2+sRC(3-K)+1}$$

Med brytfrekvensen $\omega_1=1/(RC)$ har vi Bodediagrammet (med lågfrekvens $20\log_1 0(K)$ och $\zeta=(3-K)/2<1$ för $K>1$)




ω/ω_1
0.01
0.1
1
10
100
0
-90
-180
$\arg(H)$