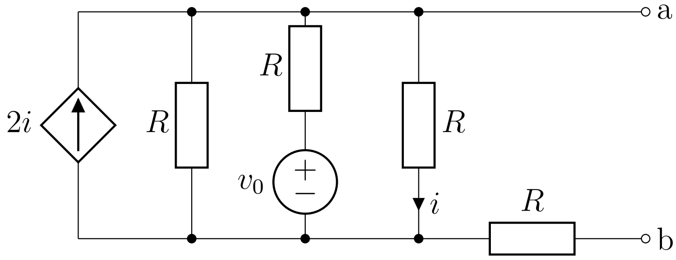
Tentamen i EITF90 Ellära och elektronik, 4/6 2019

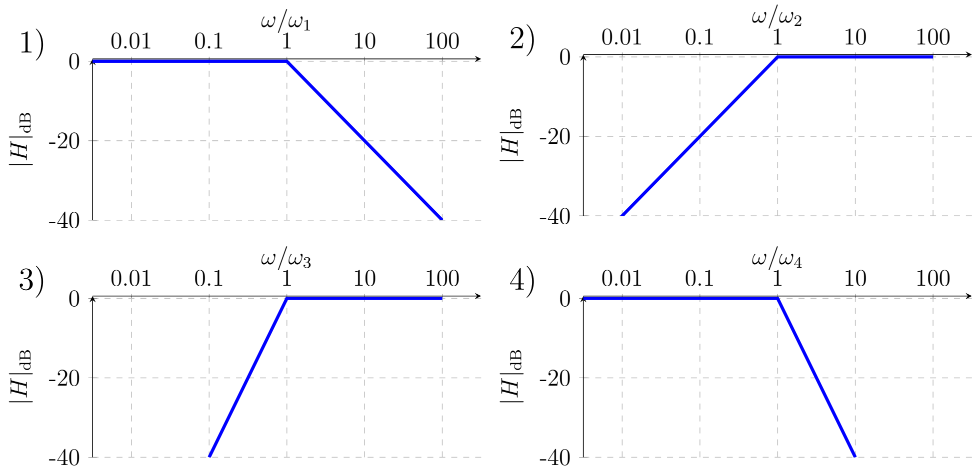
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori. Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Bestäm Thévenin och Norton-ekvivalenterna med avseende på nodparet a–b i kretsen. Spänningen v_0 och resistansen R är givna.



2



Rätlinje approximationen för fyra olika filter med överföringsfunktion $H = V_{\text{ut}}/V_{\text{in}}$ visas i figur 1,2,3,4. Filterna kan bestå av ett motstånd med resistans $R = 100\,\Omega$, en kondensator med kapacitans $C = 10\,\mu\text{F}$, och en spole med induktans $L = 0.1\,\mu\text{H}$.

Rita figurer för de olika fallen 1,2,3,4 som visar hur de olika filterna kan vara kopplade (ange v_{in} och v_{ut}) och bestäm brytfrekvenserna ω_n, $n = 1, 2, 3, 4$.

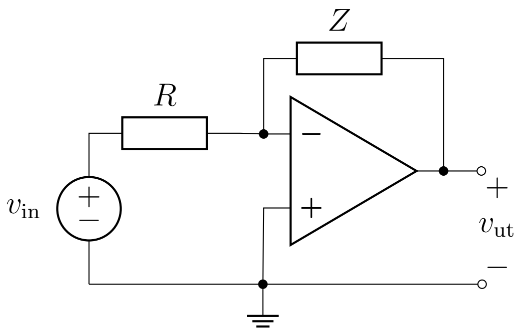
Observera att det finns flera olika sätt att realisera filter och att det räcker med ett.

3

Bestäm vilket kretselement som ska ersätta Z och ange dess värde så att utsignalen $v_{\text{ut}}(t)$ ges av insignalens

1. derivata $v_{\text{ut}} = -\alpha_1 \frac{\mathrm{d}v_{\text{in}}}{\mathrm{d}t}$
2. integral $v_{\text{ut}} = -\alpha_2 \int_0^t v_{\text{in}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

för en känd insignal $v_{\text{in}}(t)$ med $v_{\text{in}}(t) = 0$ för $t < 0$. Operationsförstärkaren kan anses vara ideal och R, α_1, α_2 är givna.



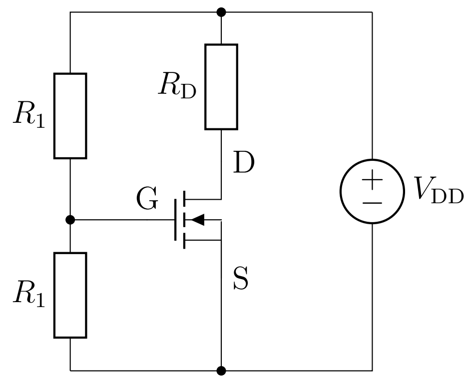
4

Tröskelspänningen för NMOS transistorn är V_t och NMOS konstanten K är känd.

a) I vilket intervall skall V_DD ligga för att transistorn skall vara i det strypta området?

b) Låt $V_\mathrm{DD} = 4V_\mathrm{t}$. I vilket intervall skall R_D ligga för att transistorn skall vara i det linjära området?

c) Låt $V_\mathrm{DD} = 4V_\mathrm{t}$. I vilket intervall skall R_D ligga för att transistorn skall vara i det mättade området?



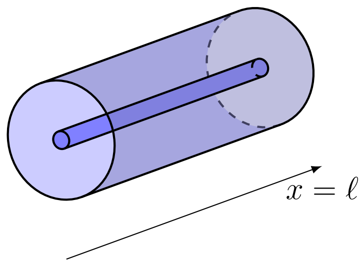
5

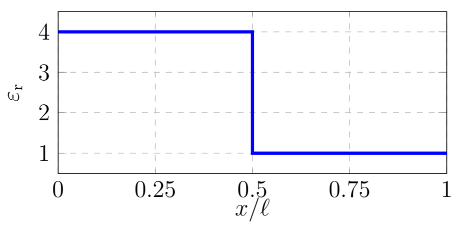
En transmissionsledning består av en koaxialkabel med längd ℓ, radie a på innerledaren, radie b på ytterledaren och relativ permittivitet $\varepsilon_\mathrm{r}(x)$ mellan ledarna.

(a) Bestäm kapacitansen per längdenhet för en koaxialkabel med relativ permittivitet ε_r.

(b) Bestäm inimpedansen vid $x = 0$ för fallet $\varepsilon_\mathrm{r}(x) = 4$ för $0 < x \leq \ell/2$, $\varepsilon_\mathrm{r}(x) = 1$ för $\ell/2 \leq x \leq \ell$ och frirymdsvåglängd $\lambda = 2\ell$.

Inget är inkopplat vid $x = 0$ och $x = \ell$, koaxialkabeln är omsluten av luft ($\varepsilon_\mathrm{r} = 1$, $\mu = \mu_0$) och materialet mellan ledarna har permeabilitet $\mu = \mu_0$. Uttrycken från formelsamlingen får användas i deluppgift (b) men inte i (a).





6

En motor modelleras med en resistans R i serie med en induktans L. Motorn kopplas till en tidsharmonisk spänningskälla $v_\mathrm{in}(t) = \mathrm{Re}\{V_\mathrm{in}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ med en ledning vars förluster modelleras med en resistans R_l.

(a) Bestäm den aktiva effektutvecklingen P_m i motorn.

(b) Bestäm effektutvecklingen P_l i ledningen.

(c) Koppla in en kondensator parallellt med motorn så att ledningsförlusterna $P_\mathrm{l}/P_\mathrm{m}$ minimeras. Bestäm kapacitansen C och ledningsförlusterna $P_\mathrm{l}/P_\mathrm{m}$.

Lösningar

1

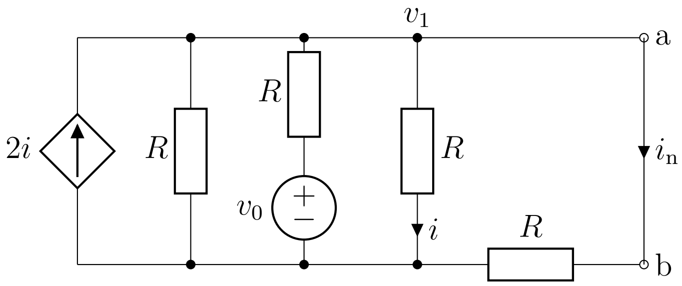
Tomgångsspänningen bestäms med nodanalys ($i = v_\mathrm{t}/R$)

$$\frac{-2v_\mathrm{t}}{R} + \frac{v_\mathrm{t} - 0}{R} + \frac{v_\mathrm{t} - v_0}{R} + \frac{v_\mathrm{t} - 0}{R} = 0$$

som efter förenkling ger

$$v_\mathrm{t} = v_0$$

Kortslutningsströmmen $i_\mathrm{n} = v_1/R$ från



Nodanalys

$$\frac{-2v_1}{R} + \frac{v_1 - 0}{R} + \frac{v_1 - v_0}{R} + \frac{v_1 - 0}{R} + \frac{v_1 - 0}{R} = 0$$

som efter förenkling ger

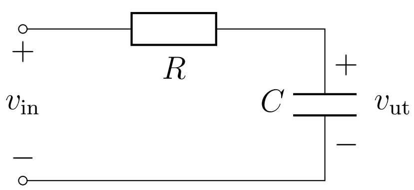
$$2v_1 = v_0 \quad \text{och } i_\mathrm{n} = \frac{v_0}{2R}$$

Svar:

$$v_\mathrm{t} = v_0, \quad i_\mathrm{n} = \frac{v_0}{2R} \quad \text{och } R_\mathrm{t} = \frac{v_\mathrm{t}}{i_\mathrm{n}} = 2R$$

2

1. Figuren visar ett lågpassfilter som till exempel kan realiseras som

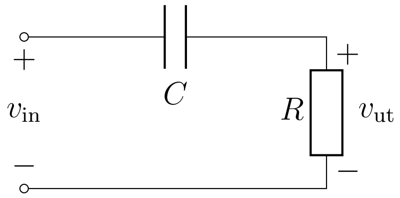


med överföringsfunktion

$$H = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s/\omega_1}$$

med brytfrekvens $\omega_1 = 1/(RC) = 10^3\,\mathrm{rad/s}$.

2. Figuren visar ett högpassfilter som till exempel kan realiseras genom att byta plats på R och C i det första filtret som

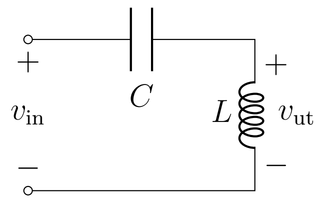


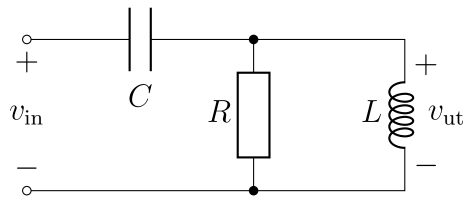
med överföringsfunktion

$$H = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{sRC}{1 + sRC} = \frac{s/\omega_2}{1 + s/\omega_2}$$

med brytfrekvens $\omega_2 = 1/(RC) = 10^3\,\text{rad/s}$.

3. Figuren visar ett högpassfilter som enklast realiseras med en serie LC krets (alternativt med ett C i serie med en parallell RL-krets)





med överföringsfunktioner

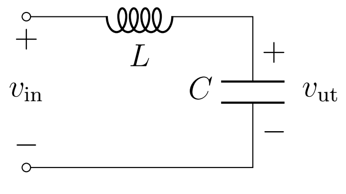
$$H = \frac{sL}{sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2LC}{1 + s^2LC} = \frac{s^2/\omega_3^2}{1 + s^2/\omega_3^2}$$

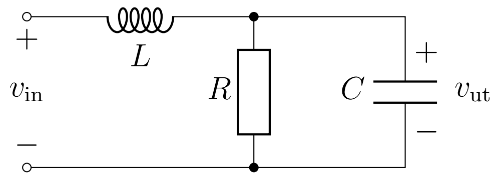
och alternativt

$$H = \frac{\frac{sLR}{R+sL}}{\frac{sLR}{R+sL} + \frac{1}{sC}} = \frac{sLR}{\frac{R+sL}{sC}1 + sLR} = \frac{s^2LC}{1 + sL/R + s^2LC} = \frac{s^2/\omega_3^2}{1 + 2\zeta s/\omega_3 + s^2/\omega_3^2}$$

med brytfrekvens $\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6\,\text{rad/s}$ och $\zeta = \frac{L\omega_3}{2R} = 10^{-7}\,10^6\,10^{-2}/2 = 10^{-3}/2 < 1$.

4. Figuren visar ett lågpassfilter som enklast realiseras med en serie LC krets (eller alternativt ett L i serie med en parallell RC-krets)





med överföringsfunktioner

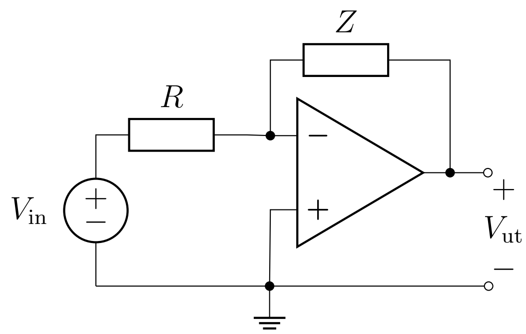
$$H = \frac{\frac{1}{sc}}{\frac{1}{sc} + sL} = \frac{1}{1 + s^2LC} = \frac{1}{1 + s^2/\omega_4^2}$$

och alternativt

$$H = \frac{\frac{1}{sc + \frac{1}{R}}}{\frac{1}{sc + \frac{1}{R}} + sL} = \frac{1}{1 + sL/R + s^2LC} = \frac{1}{1 + 2\zeta s/\omega_4 + s^2/\omega_4^2}$$

med brytfrekvens $\omega_4 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6\,\text{rad/s}$ och $\zeta = \frac{L\omega_4}{2R} = 10^{-7}\,10^6\,10^{-2}/2 = 10^{-3}/2 < 1$.

3



Inga strömmar och ingen spänning mellan operationsförstärkarens ingångar.

Laplacetransformera och nodanalys. Här använder vi att insignalen är noll för negativa tider (enkelsidig Laplacetransform).

$$\frac{0 - V_{\text{in}}}{R} + \frac{0 - V_{\text{ut}}}{Z} = 0$$

som ger

$$V_{\text{ut}} = -\frac{Z}{R} V_{\text{in}}$$

och med en invers Laplacetransform om $Z = sL$

$$v_{\text{ut}} = -\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}v_{\text{in}}}{\mathrm{d}t}$$

och med $Z = 1/(sC)$

$$v_{\text{ut}}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{\text{in}}(t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

Svar:

1. En spole med induktans $L = \alpha_1 R$
2. En kondensator med kapacitans $C = 1/(\alpha_2 R)$

4

Spänningsdelning ger

$$v_{\text{GS}} = V_{\text{DD}}\frac{R_1}{R_1 + R_1} = V_{\text{DD}}/2$$

a) Strypta området om $v_{\text{GS}} < V_{\text{t}}$ och därmed $V_{\text{DD}} < 2V_{\text{t}}$

b) Linjära området om $v_{\text{GS}} > V_{\text{t}}$ och $v_{\text{GD}} > V_{\text{t}}$. Med $v_{\text{GD}} = V_{\text{t}}$ har vi

$$I_{\text{D}} = \frac{V_{\text{DD}} - v_{\text{GS}} + V_{\text{t}}}{R_{\text{D}}} = \frac{V_{\text{DD}}/2 + V_{\text{t}}}{R_{\text{D}}} = \frac{3V_{\text{t}}}{R_{\text{D}}}$$

och på gränsen mellan linjära och mättade området

$$I_{\text{D}} = K(v_{\text{GS}} - V_{\text{t}})^2 = K(V_{\text{DD}}/2 - V_{\text{t}})^2 = KV_{\text{t}}^2$$

som tillsammans ger

$$\frac{3}{R_\mathrm{D}} = KV_\mathrm{t}$$

Linjära området om $v_\mathrm{GS} > V_\mathrm{t}$ och

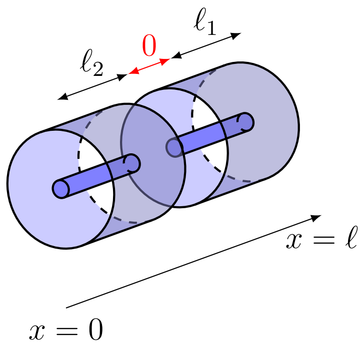
$$R_\mathrm{D} > \frac{3}{KV_\mathrm{t}}$$

c) Mättade området om $v_\mathrm{GS} > V_\mathrm{t}$ och

$$R_\mathrm{D} < \frac{3}{KV_\mathrm{t}}$$

5

Transmissionsledningen kan modelleras som två sammansatta koaxialkablar men längd $\ell/2$ och $\ell/2$ med relativ permittivitet $\varepsilon_{\mathrm{r}1}$och $\varepsilon_{\mathrm{r}2}$.



(a) Dela upp området mellan ledarna i cylindriska skal med infinitesimal tjocklek $\mathrm{d}r_\mathrm{c}$. Skalens kapacitans ges av plattkondensatorapproximationen med invers

$$\mathrm{d}(C^{-1}) = \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\ell 2\pi r_\mathrm{c}}$$

Skalen är seriekopplade så inversen av den totala kapacitansen ges av integralen

$$C^{-1} = \int \mathrm{d}(C^{-1}) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\ell 2\pi r_\mathrm{c}} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\ell 2\pi}\left[\ln r_\mathrm{c}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\ell 2\pi}\ln(r_2/r_1)$$

Kapacitans per längdenhet

$$\frac{C}{\ell} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}2\pi}{\ln(b/a)}$$

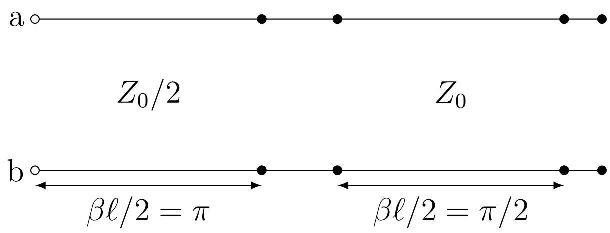
(b) Den karakteristiska impedansen för en koaxialkabel ges av (formelsamling, L är induktans per längdenhet och C är kapacitans per längdenhet)

$$Z_\mathrm{koax} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\ln(b/a)}{2\pi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\frac{\ln(b/a)}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}2\pi} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}}$$

där Z_0 betecknar den karakteristiska impedansen för fallet med luft. Vågtalet ges av (formelsamling) $\beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}} = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}\omega/c_0 = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}}2\pi/\lambda$, där λ är frirymdsvåglängden (våglängden i vakuum). Vi har därmed

$$Z_\mathrm{koax} = \begin{cases} Z_0/2 & 0 \le x \le \ell/2 \\ Z_0 & \ell/2 \le x \le \ell \end{cases} \qquad \beta = \begin{cases} 4\pi/\lambda & 0 \le x \le \ell/2 \\ 2\pi/\lambda & \ell/2 \le x \le \ell \end{cases}$$

Med $\lambda = 2\ell \Rightarrow \ell/2 = \lambda/4$ beskrivs då transmissionsledningen av

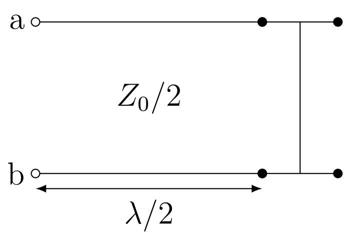


där lasten $Z_\mathrm{L} = \infty$ (öppen avslutning) används längst ut till höger.

Inimpedansen ges nu först av en kvartsvågstransformator ($\beta\ell/2 = \pi/2$)

$$Z_\mathrm{in} = \frac{Z_0^2}{Z_\mathrm{L}} = 0$$

vilket förenklar problemet till



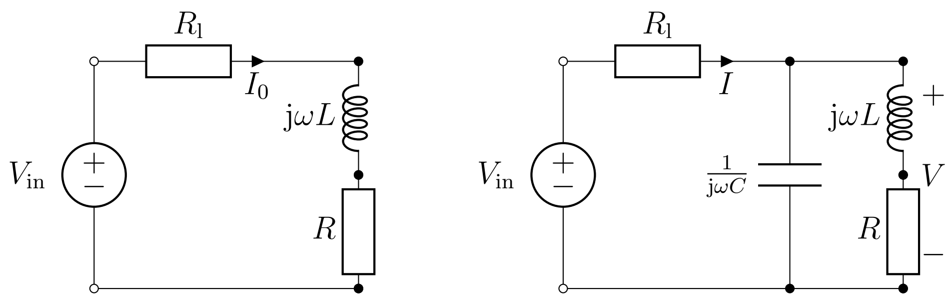
och från formelsamlingen med $Z_\mathrm{L} = 0$ och $\beta\ell/2 = \pi$

$$Z_\mathrm{ab} = \frac{Z_0}{2}\frac{\mathrm{j}\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = 0$$

Svar:

1. $\dfrac{C}{\ell} = \dfrac{\varepsilon_0 2\pi}{\ln(b/a)}$
2. $Z_\mathrm{ab} = 0$

6



En motor modelleras med en resistans R i serie med en induktans L. Motorn kopplas till en tidsharmonisk spänning $v_\mathrm{in}(t) = \mathrm{Re}\{V_\mathrm{in}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$ med en ledning med förluster modellerade genom en resistans R_l.

Transformera till frekvensplanet.

(a) Bestäm den aktiva effektutvecklingen P_m i motorn.

Strömmen ges av

$$I_0 = \frac{V_\mathrm{in}}{R_\mathrm{l} + R + \mathrm{j}\omega L}$$

och den effektiva effektutvecklingen i motorn

$$P_\mathrm{m} = \frac{R|I_0|^2}{2} = \frac{R|V_\mathrm{in}|^2}{2((R_\mathrm{l} + R)^2 + (\omega L)^2)}$$

(b) Bestäm effektutvecklingen P_l i ledningen.

$$P_\mathrm{l} = \frac{R_\mathrm{l}|I_0|^2}{2} = \frac{R_\mathrm{l}|V_\mathrm{in}|^2}{2((R_\mathrm{l} + R)^2 + (\omega L)^2)}$$

och därmed

$$\frac{P_\mathrm{l}}{P_\mathrm{m}} = \frac{R_\mathrm{l}}{R}$$

(c) Koppa in en kondensator med kapacitans C parallellt med motorn för att eliminera den reaktiva effektutvecklingen i motorn och därmed strömmen i ledningen. Den komplexa effektutvecklingen i motorn ges av

$$S_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R - \mathrm{j}\omega L} = \frac{R + \mathrm{j}\omega L}{2(\omega^2 L^2 + R^2)}|V|^2 = P_\mathrm{m} + \mathrm{j}Q_\mathrm{m}$$

och den reaktiva effektutvecklingen i kondensatorn

$$Q_\mathrm{C} = \frac{-|V|^2\omega C}{2}$$

där V betecknar spänningen över motorn. Bestäm kapacitansen från $Q = Q_\mathrm{C} + Q_\mathrm{m} = 0$ som ger

$$C = \frac{L}{\omega^2 L^2 + R^2}$$

Impedansen för kapacitansen och motorn är (kan också använda den aktiva effektutvecklingen i motorn)

$$Z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R+\mathrm{j}\omega L}} = \frac{\omega^2 L^2 + R^2}{\mathrm{j}\omega L + R - \mathrm{j}\omega L} = \frac{\omega^2 L^2 + R^2}{R}$$

Ledningsförlusterna normaliserat med effektutvecklingen i motorn

$$\frac{P_\mathrm{l}}{P_\mathrm{m}} = \frac{R_\mathrm{l}|I|^2}{\mathrm{Re}\{Z\}|I|^2} = \frac{R_\mathrm{l}R}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{R_\mathrm{l}/R}{\omega^2 L^2/R^2 + 1} \leq \frac{R_\mathrm{l}}{R}$$

Alternativ lösning: Använd strömmen istället för spänningen $P_\mathrm{l} = \frac{R_\mathrm{l}|I|^2}{2}$ och

$$P_\mathrm{m} = \frac{|I|^2 R}{2|\mathrm{j}\omega C(R + \mathrm{j}(\omega L - 1/(\omega C)))|^2} = \frac{|I|^2 R}{2\omega^2 C^2(R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2)}$$
$$= \frac{|I|^2 R}{2(R^2\omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2)}$$

Minimera nämnaren som funktion av C

$$R^2\omega^2 2C + 2\omega^2 L(\omega^2 LC - 1) = 0 \quad \text{och } R^2 C + L(\omega^2 LC - 1) = 0$$

som ger

$$C(R^2 + L^2\omega^2) = L \quad \text{och } C = \frac{L}{R^2 + L^2\omega^2}$$

Ledningsförlusterna ges av

$$\begin{aligned} P_\mathrm{m} = \frac{|I|^2 R}{2(R^2\omega^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2)} &= \frac{|I|^2 R}{2(R^2\omega^2 C^2 + R^4 C^2/L^2)} \\ &= \frac{|I|^2 L^2}{2C^2 R(\omega^2 L^2 + R^2)} = \frac{|I|^2(\omega^2 L^2 + R^2)}{2R} \end{aligned}$$

och

$$\frac{P_\mathrm{l}}{P_\mathrm{m}} = \frac{RR_\mathrm{l}}{\omega^2 L^2 + R^2} = \frac{R_\mathrm{l}/R}{\omega^2 L^2/R^2 + 1}$$