Tentamen i EITF90 Ellära och elektronik, 4/5 2019

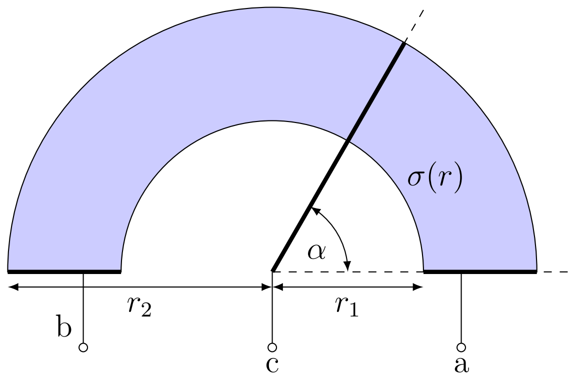
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Figuren visar ett reglerbart motstånd med tre anslutningar (a,b,c). Den har en vridbar glidkontakt som ligger an mot en resistiv bana. Figuren visar en område bestående av en halvcirkel med radierna r_1 och r_2 och med tjocklek d in i papperet, samt ledningsförmåga $\sigma(r) = \sigma_0/r$. De tjocka linjerna vid anslutningarna a och b är metallbelagda. Anslutningen c är vriden en vinkel α, enligt figuren.

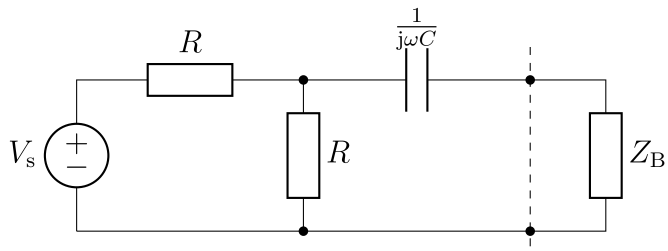
Tjockleken d antas vara mycket tunn $d \ll r_2$ så du kan anta att c är kopplad till den resistiva banan på samma sätt som anslutningarna a och b.

1. Bestäm resistansen R_{ab}.
2. Bestäm resistansen R_{ac}.
3. Bestäm resistansen R_{bc}.



2

Den komplexa spänningen V_s, vinkelfrekvensen ω samt komponentvärdena R och C är kända.

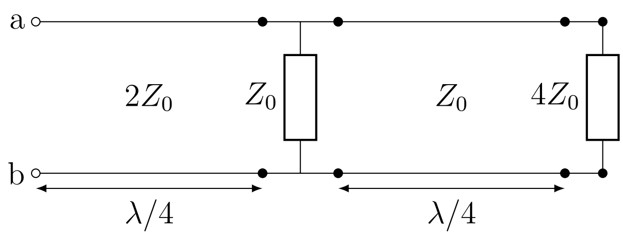


a) Bestäm Théveninekvivalenten för nätet till vänster om den streckade linjen.

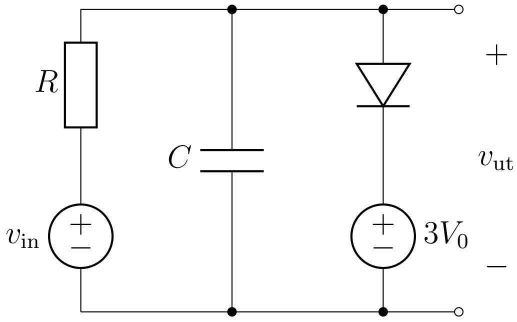
b) Bestäm en komplex belastningsimpedans $Z_\text{B} = R_\text{B} + \text{j}X_\text{B}$ så att den aktiva effekten i belastningen maximeras. Ange hur denna impedans kan realiseras med verkliga kretselement (något eller några av R, L, C) samt vilka värden du använder. Rita en figur som visar hur de skall kopplas in.

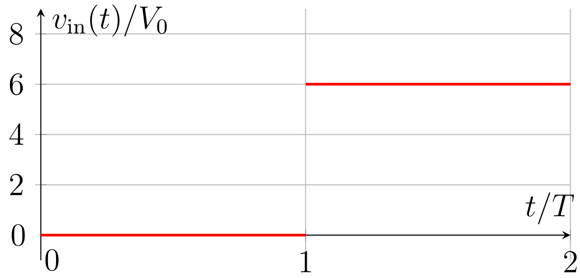
3

Bestäm inimpedansen mellan nodparet ab. Kopplingen består av två transmissionsledningar med karakteristiska impedanser $2Z_0$ och Z_0 med vardera längd $\lambda/4$, där λ betecknar våglängden.



4





Bestäm utsignalen $v_{ut}(t)$ för $t \geq 0$ då $v_{in}(t) = 0\,\mathrm{V}$ för $t < T$ och $v_{in}(t) = 6V_0 > 0$ för $t \geq T$. Dioden kan anses vara ideal.

5

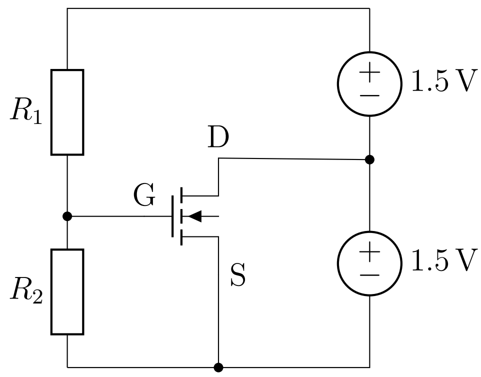
Tröskelspänningen för NMOS transistorn är $1\,\mathrm{V}$.

a) Bestäm ett uttryck för v_{GS}.

b) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det strypta området?

c) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det linjära området (triodområdet)?

d) I vilket intervall skall R_1/R_2 ligga för att transistorn skall vara i det mättade området?



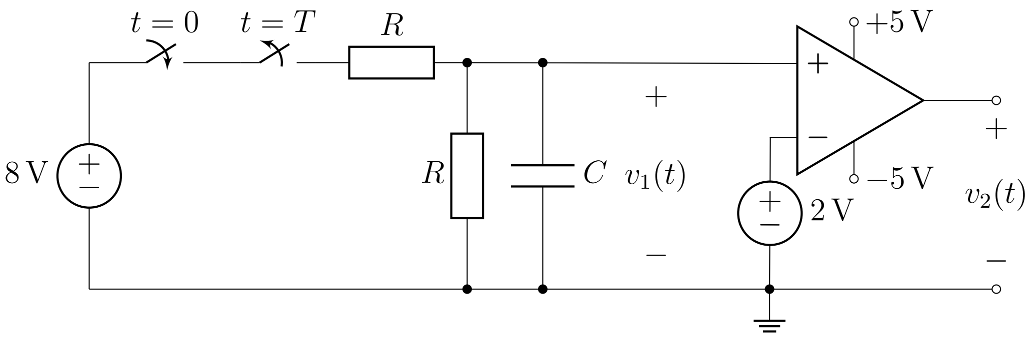
6

I nedanstående krets är den vänstra strömbrytaren öppen för $t < 0$ och sluts vid $t = 0$. Den högra strömbrytaren är sluten för $t < T$ och öppnas vid $t = T$. Anta att $T \gg RC$ (det räcker med $T \approx 5RC$). OP:ns utspänning begränsas av matningspotentialerna $\pm 5\,\mathrm{V}$.

a) Beräkna $v_1(t)$ och $v_2(t)$ för $0 < t < T$.

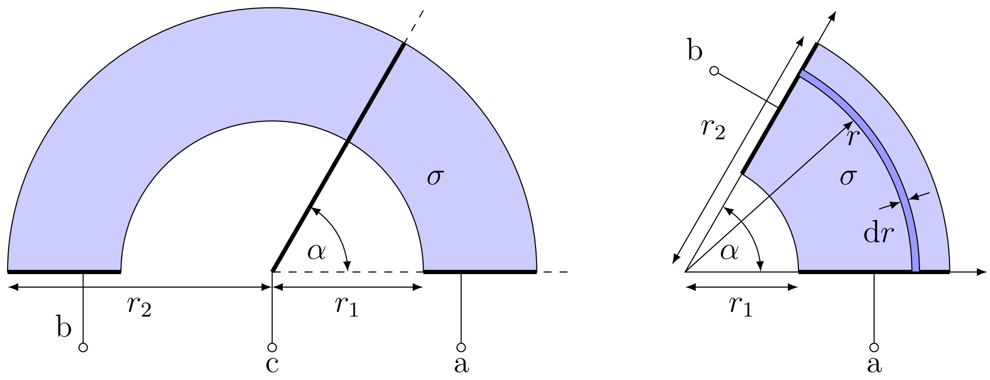
b) Beräkna $v_1(t)$ och $v_2(t)$ för $t > T$.

c) Skissa graferna för $v_1(t)$ och $v_2(t)$ för $-T < t < 2T$.



Lösningar

1



De olika fallen 1,2,3 kan bestämmas från resistansen av en cirkelsektor med öppningsvinkel $\alpha, \pi-\alpha, \pi$.

Symmetrin ger att strömmen går längs cirkelbanor (konstant radie), och vi kan dela upp geometrin i flera parallella rör enligt nedan: Ett sådant rör har konduktans (formelsamling)

$$\mathrm{d}G = \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\ell} = \frac{\sigma(r) d\,\mathrm{d}r}{r\alpha} == \frac{\sigma_0 d\,\mathrm{d}r}{r^2\alpha}$$

där $\mathrm{d}S = d\,\mathrm{d}r$ är tvärsnittsytan på röret och $\ell = r\alpha$ är dess längd. Samtliga rör är parallellkopplade mellan a och b, varför vi får konduktansen

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\sigma_0 d\,\mathrm{d}r}{r^2\alpha} = \frac{\sigma_0 d}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\sigma_0 d}{\alpha}\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma_0 d}{\alpha}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

och resistansen

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma_0 d\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

<u>Svar:</u>

1. Resistansen R_{ab} ges av fallet $\alpha = \pi$

$$R_{\mathrm{ab}} = \frac{\pi}{\sigma_0 d\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

2. Resistansen R_{ac} är

$$R_{\mathrm{ac}} = \frac{\alpha}{\sigma_0 d\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

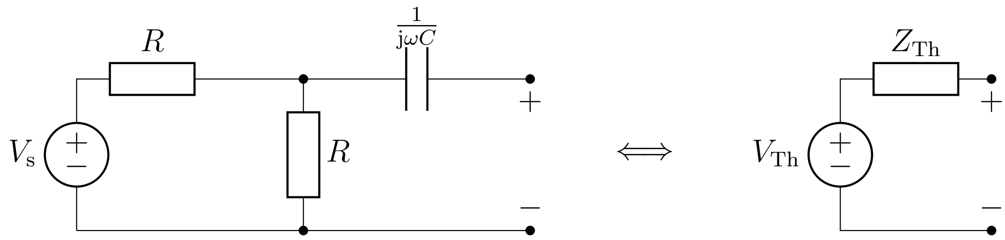
3. Resistansen R_{bc} ges av $\pi-\alpha$

$$R_{\mathrm{bc}} = \frac{\pi-\alpha}{\sigma_0 d\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

Observera att $R_{\mathrm{ab}} = R_{\mathrm{ac}} + R_{\mathrm{bc}}$

2

a) Théveninekvivalenten beräknas enligt nedan.



$$V_{Th} = V_s \frac{R}{R+R} = \frac{V_s}{2}$$

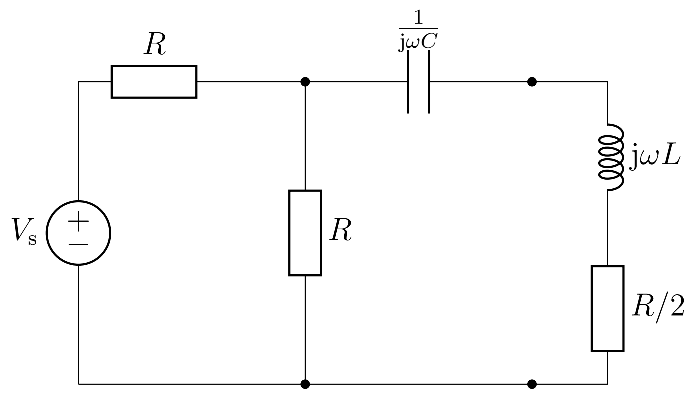
Théveninimpedansen är lika med inimpedansen då spänningskällan är nollställd, $V_s = 0$, dvs

$$Z_{Th} = \frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}$$

b) Maximal aktiv effektutveckling fås då belastningsimpedansen väljes till $Z_B = Z_{Th}^* = R/2 + j/(\omega C)$. Belastningen kan t.ex. skapas genom att en resistans $R/2$ kopplas i serie med en spole vars induktans ges av

$$j\omega L = \frac{j}{\omega C} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{1}{\omega^2 C}$$

Kopplingsschemat blir



Svar:

a) $V_{Th} = \frac{V_s}{2}$, $Z_{Th} = \frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}$.

b) Se figur ovan.

3

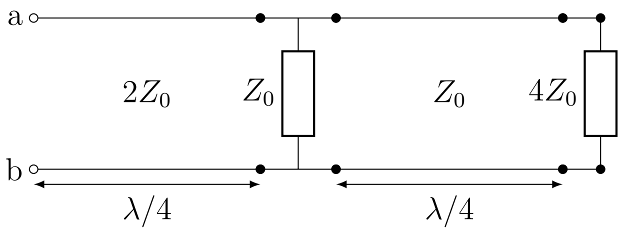
Kvartsvågstransformator för en transmissionsledning med karakteristisk impedans Z_0 och last Z_L

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L}$$

som ses av $l\beta = l2\pi/\lambda = \pi/2$ och från formelsamlingen

$$Z_{\text{in}} = Z_0 \frac{0 + \text{j}Z_0}{0 + \text{j}Z_{\text{L}}} = \frac{Z_0^2}{Z_{\text{L}}}$$

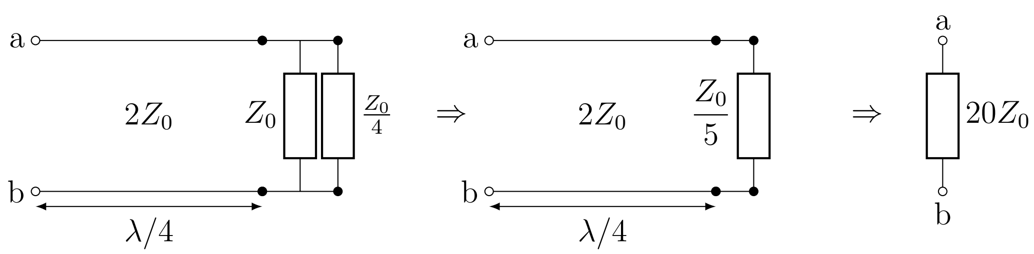
Förenkla



från insidan

$$Z_{\text{in}} = \frac{(Z_0)^2}{4Z_0} = \frac{Z_0}{4}$$

till



där vi använt

$$Z_{\text{ab}} = \frac{4Z_0^2}{Z_0/5} = 20Z_0$$

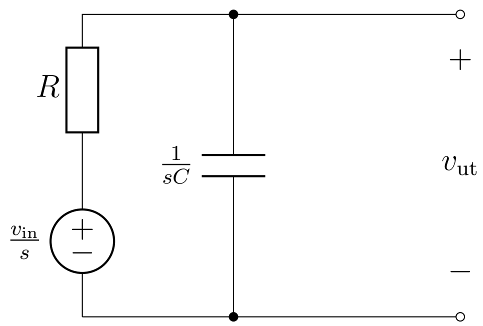
<u>Svar:</u>

$$Z_{\text{ab}} = 20Z_0$$

4

För $v_{\text{ut}}(t) \leq 3V_0$ kan dioden ersättas av ett avbrott och $v_{\text{ut}}(t)$ kan inte vara $> 3V_0$.

Betrakta först tider då $v_{\text{ut}}(t) \leq 3V_0$ och förenkla kretsen till



Nodanalys (KCL) ger

$$\frac{v_{\text{ut}} - v_{\text{in}}}{R} + C\frac{\text{d}v_{\text{ut}}}{\text{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\text{d}v_{\text{ut}}}{\text{d}t} + \frac{v_{\text{ut}}}{RC} = \frac{v_{\text{in}}}{RC} \Rightarrow \frac{\text{d}v_{\text{ut}}}{\text{d}t} + \frac{v_{\text{ut}}}{\tau} = \frac{v_{\text{in}}}{\tau}$$

där $\tau = RC$. Lösning (integrerande faktor $\mathrm{e}^{t/\tau}$) från

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{t/\tau} v_{\mathrm{ut}}) = \mathrm{e}^{t/\tau}\frac{v_{\mathrm{in}}}{\tau}$$

och ($v_{\mathrm{in}} = 0$ för $t < T$)

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{t_1/\tau}\frac{v_{\mathrm{in}}(t_1)}{\tau}\,\mathrm{d}t_1 = 6V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\int_{T}^{t} \mathrm{e}^{t_1/\tau}\frac{1}{\tau}\,\mathrm{d}t_1 = 6V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[\mathrm{e}^{t_1/\tau}\right]_T^t$$
$$= 6V_0\mathrm{e}^{-t/\tau}(\mathrm{e}^{t/\tau} - \mathrm{e}^{T/\tau}) = 6V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau})$$

Lösningen gäller fram till $v_{\mathrm{ut}}(t) = 3V_0$ dvs

$$6V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau}) = 3V_0 \Rightarrow 3 = 6\mathrm{e}^{(T-t)/\tau} \Rightarrow \ln 2 = (t - T)/\tau \Rightarrow t = T + \tau\ln 2$$

Kan alternativt använda Laplacetransform för att beräkna spänningen. Använd då först att kondensatorn är urladdad (laddas ut genom resistansen (RC krets) eftersom spänningskällan är av för $t < T$). Laplacetransformering ger ($\mathcal{L}\{v_{\mathrm{in}}\} = 6V_0\mathrm{e}^{-sT}/s$ (kan också räkna från tiden $t = T$ och då ta bort e^{-sT})

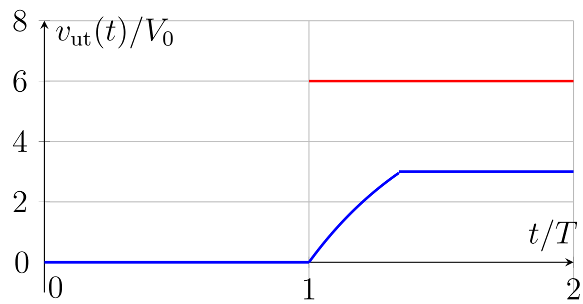
$$V_{\mathrm{ut}} = \frac{1}{sC}\frac{1}{R + \frac{1}{sC}}\frac{6\mathrm{e}^{-sT}}{s} = 6V_0\mathrm{e}^{-sT}\frac{1}{s(1 + sRC)}$$

och

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = 6V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/RC})$$

<u>Svar:</u>

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 6V_0(1 - \mathrm{e}^{(T-t)/\tau}) & T \le t \le T + \tau\ln 2 \\ 3V_0 & t > T + \tau\ln 2 \end{cases}$$



5

a) Spänningsdelning ger $v_{\mathrm{GS}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}3\,\mathrm{V} = \dfrac{3\,\mathrm{V}}{1 + R_1/R_2}$.

b) Transistorn är i det strypta området om $v_{\mathrm{GS}} < V_{\mathrm{t}} = 1\,\mathrm{V}$. Då måste gälla $\dfrac{R_1}{R_2} > 2$.

c) Transistorn är i det mättade området om $v_{\mathrm{GS}} > V_{\mathrm{t}} = 1\,\mathrm{V}$ och $0 < v_{\mathrm{DS}} < v_{\mathrm{GS}} - V_{\mathrm{t}}$. Eftersom $v_{\mathrm{DS}} = 1.5\,\mathrm{V}$ krävs att $v_{\mathrm{GS}} > 2.5\,\mathrm{V}$. Det ger $\dfrac{R_1}{R_2} < 0.2$.

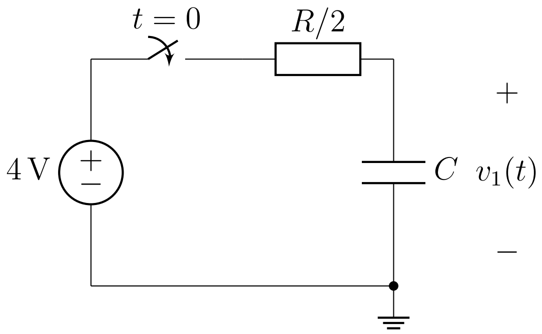
d) Transistorn är i det mättade området om $v_{\mathrm{GS}} > V_{\mathrm{t}} = 1$ V och $v_{\mathrm{GS}} < v_{\mathrm{DS}} + V_{\mathrm{t}} = 2.5\,\mathrm{V}$. Det ger $0.2 < \dfrac{R_1}{R_2} < 2$.

6

Operationsförstärkaren är kopplad som en komparator: då $v_1 < 2\,\mathrm{V}$ är $v_2 = -5\,\mathrm{V}$, och då $v_1 > 2\,\mathrm{V}$ är $v_2 = +5\,\mathrm{V}$. Den vänstra delen av kretsen kan analyseras oberoende av OP:n.

a) $0 < t < T$

Den vänstra delen av kretsen förenklas först genom en Théveninekvivalent för resistanserna och spänningskällan enligt nedan:



Detta svarar mot en uppladdning av en kapacitans med tidskonstant $RC/2$, dvs

$$v_1(t) = 4\,\mathrm{V} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-t/(RC/2)})$$

Detta ger att $v_1 = 2\,\mathrm{V}$ då

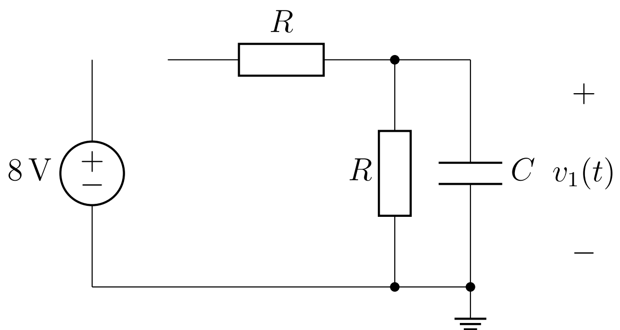
$$\frac{1}{2} = 1 - \mathrm{e}^{-2t/(RC)} \to \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-2t/(RC)} \to \ln(2) = 2t/(RC)$$

och slutligen $t = \frac{RC}{2}\ln(2)$.

Svar: $v_1(t) = 4\,\mathrm{V} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-2t/(RC)})$ och $v_2(t) = \begin{cases} -5\,\mathrm{V} & t < \frac{RC}{2}\ln(2) \\ +5\,\mathrm{V} & t > \frac{RC}{2}\ln(2) \end{cases}$

b) $t > T$

Den vänstra delen av kretsen är nu



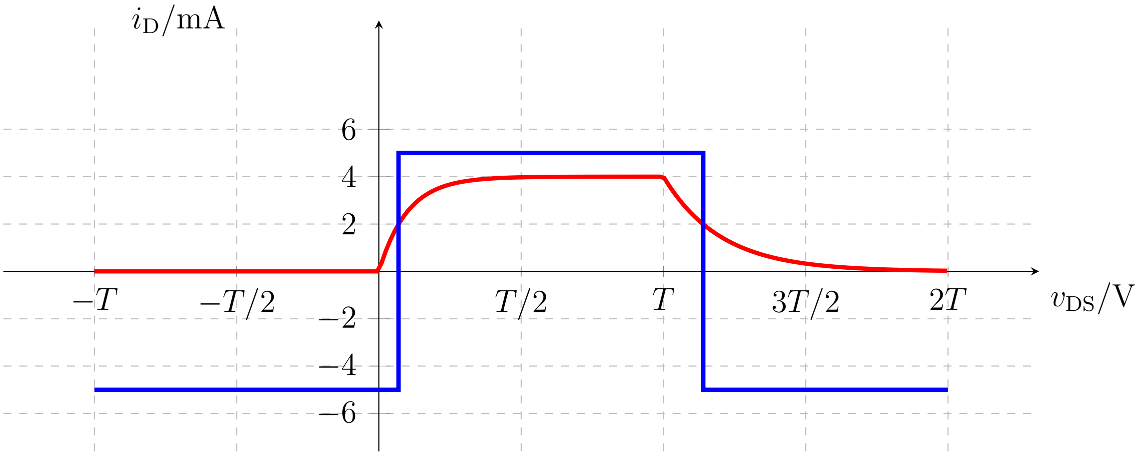
Detta svarar mot en urladdning av kapacitansen med en tidskonstant RC, med begynnelsevärdet $V_T = 4\,\mathrm{V} \cdot (1 - \mathrm{e}^{-2T/(RC)})$. Med $T \approx 5RC$ är $\mathrm{e}^{-2T/RC} \approx \mathrm{e}^{-10} \ll 1$, dvs $V_T = 4\,\mathrm{V}$.

$$v_1(t) = 4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-(t-T)/(RC)}$$

Detta ger att $v_1 = 2\,\mathrm{V}$ då $t - T = RC\ln 2$.

Svar: $v_1(t) = 4\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-(t-T)/(RC)}$ och $v_2(t) = \begin{cases} +5\,\mathrm{V} & t < T + RC\ln 2 \\ -5\,\mathrm{V} & t > T + RC\ln 2 \end{cases}$

c)


$i_{\mathrm{D}}/\mathrm{mA}$
6
4
2
−2
−4
−6
$-T$
$-T/2$
$T/2$
T
$3T/2$
$2T$
$v_{\mathrm{DS}}/\mathrm{V}$