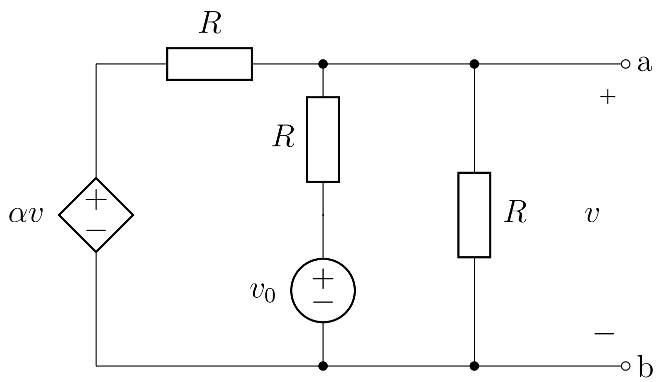
Tentamen i EITF90 Ellära och elektronik, 28/8 2018

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

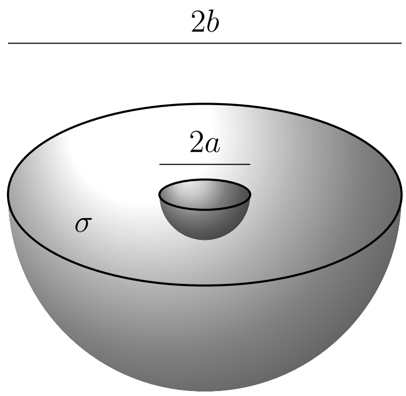
1

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet a–b i nedanstående krets.



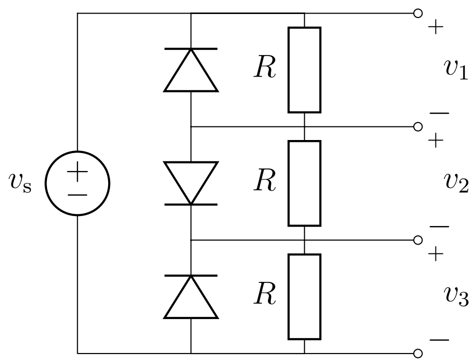
2

En elektrod i form av en metallisk halvsfär med radie a sänks ned i ett större halvsfäriskt metallskal med radie b fyllt med ett material med ledningsförmåga σ, enligt figur.
Beräkna resistansen R_{ab}.

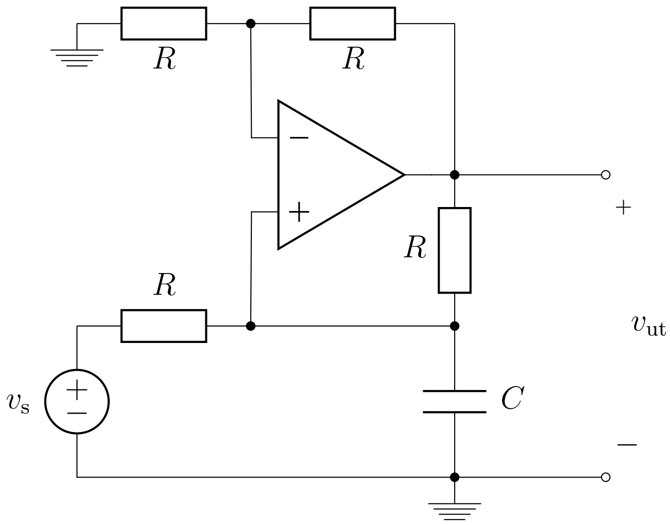


3

Bestäm spänningarna $v_1(t)$, $v_2(t)$ och $v_3(t)$ om $v_{\text{in}}(t) = V_0 \sin(\omega t)$.
Dioderna kan antas vara ideala.



4

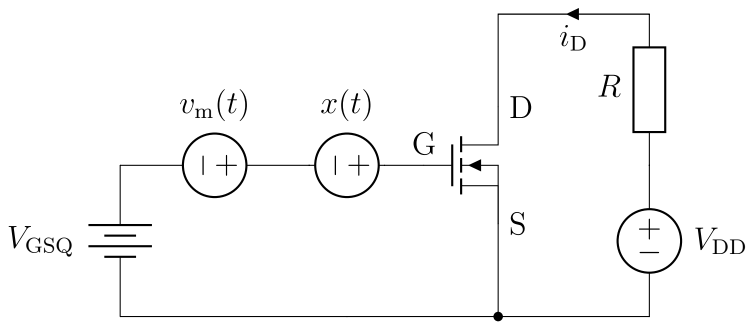


Bestäm utsignalen $v_{\mathrm{ut}}(t)$ då

$$v_{\mathrm{s}}(t) = V_0 \sin(\omega t) H(t),$$

där $H(t) = 0$ för $t < 0$ och $H(t) = 1$ för $t > 0$.
Operationsförstärkaren kan anses vara ideal och kondensatorn är oladdad för tider $t < 0$.

5



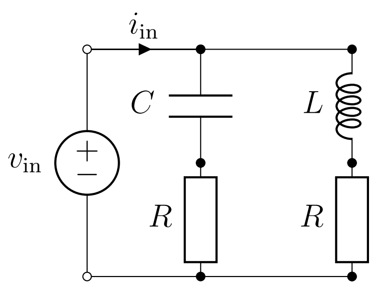
Eftersom dioder och transistorer har en olinjär ström- spänningskarakteristik kan de användas för att modulera signaler. I figuren visas en enkel krets med en MOSFET (NMOS) för att illustrera principen. Antag att signalen $x(t) = A\cos(\omega_1 t)$ ska moduleras med bärvågen $v_{\mathrm{m}}(t) = M\cos(\omega_{\mathrm{c}} t)$ för att generera signaler med vinkelfrekvenser $\omega_{\mathrm{c}} \pm \omega_1$. Tröskelspänningen V_{t0} och strömmen I_{DSS} är givna för transistorn. Likspänningarna V_{GSQ} och V_{DD} är valda så att transistorn befinner sig i mättnadsområdet.

(a) Bestäm strömmen $i_{\mathrm{D}}(t)$

(b) Bestäm amplituden för frekvenskomponenterna $\omega_{\mathrm{c}} \pm \omega_1$ i strömmen $i_{\mathrm{D}}(t)$.

6

Figuren visar en krets med tidsharmonisk spänning $v_{\mathrm{in}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$.



(a) Bestäm den reaktiva effekten Q_{L} i spolen och Q_{C} i kondensatorn.

(b) Bestäm den totala reaktiva effekten Q i kretsen för fallet $R = \sqrt{L/C}$.

(c) Bestäm inimpedansen $Z(\omega) = V_{\mathrm{in}}/I_{\mathrm{in}}$ för fallet $R = \sqrt{L/C}$.

Lösningar

1

Jorda nod b och använd Kirchhoffs strömlag (KCL) i nod a:

$$\frac{v-\alpha v}{R}+\frac{v-v_0}{R}+\frac{v-0}{R}=0 \quad \Rightarrow \quad v=\frac{v_0}{3-\alpha}=v_\infty$$

där v_∞ betecknar tomgångsspänningen. Vid kortslutning är spänningen $v=0$, och vi får kortslutningsströmmen $i_0=\frac{v_0}{R}$. Slutligen fås Thévenin-resistansen som

$$R_{\text{th}}=\frac{v_\infty}{i_0}=\frac{R}{3-\alpha}$$

Svar: Thévenin-ekvivalenten ges av en spänningskälla $v_{\text{th}}=\frac{v_0}{3-\alpha}$ i serie med resistansen $R_{\text{th}}=\frac{R}{3-\alpha}$.

2

Kan modellera resistansen som en seriekoppling av halvsfäriska skal med tjocklek $\mathrm{d}r$ som vardera har resistansen

$$\mathrm{d}R=\frac{\mathrm{d}r}{\sigma 2\pi r^2}$$

där vi använt att de sfäriska halvskalen har area $4\pi r^2/2=2\pi r^2$. Summera upp delresistanserna

$$R=\int \mathrm{d}R=\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sigma 2\pi r^2}=\frac{1}{2\pi\sigma}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b=\frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Svar:

$$R=\frac{1}{2\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

Alternativ fältteorilösning
Med strömfördelningen $\boldsymbol{J}=\frac{J_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ har vi det elektriska fältet $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}/\sigma=\frac{J_0}{\sigma r^2}$, och därmed spänningen

$$v_a-v_b=\int_{r=a}^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_a^b \underbrace{\frac{J_0}{\sigma r^2}\boldsymbol{e}_r}_{=\boldsymbol{E}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}r}_{=\mathrm{d}\boldsymbol{r}}=\frac{J_0}{\sigma}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r^2}=\frac{J_0}{\sigma}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b=\frac{J_0}{\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

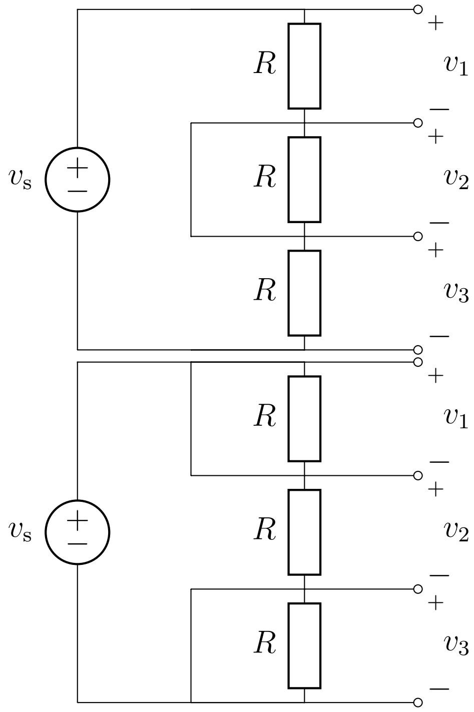
Den totala strömmen ges av en ytintegral som omsluter hela strömbanan. Denna väljs enklast som en halvsfär med radie $r=r_0$, där $a<r_0<b$. Beteckna denna yta med S, och notera att integralen över den plana gränsytan ($\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_z$) ger noll bidrag eftersom strömflödet är parallellt med denna gränsyta).

$$i_{ab}=\int_S \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S=\int_{r=r_0}\underbrace{\frac{J_0}{r^2}\boldsymbol{e}_r}_{=\boldsymbol{J}}\cdot\underbrace{\boldsymbol{e}_r\,\mathrm{d}S}_{=\boldsymbol{e}_n\,\mathrm{d}S}=\frac{J_0}{r_0^2}\int_{r=r_0}\mathrm{d}S=\frac{J_0}{r_0^2}\underbrace{2\pi r_0^2}_{\substack{\text{ytan av en}\\ \textit{halv}\text{ sfär}}}=2\pi J_0$$

Svar:

$$R_{ab}=\frac{v_a-v_b}{i_{ab}}=\frac{1}{\sigma 2\pi}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

3



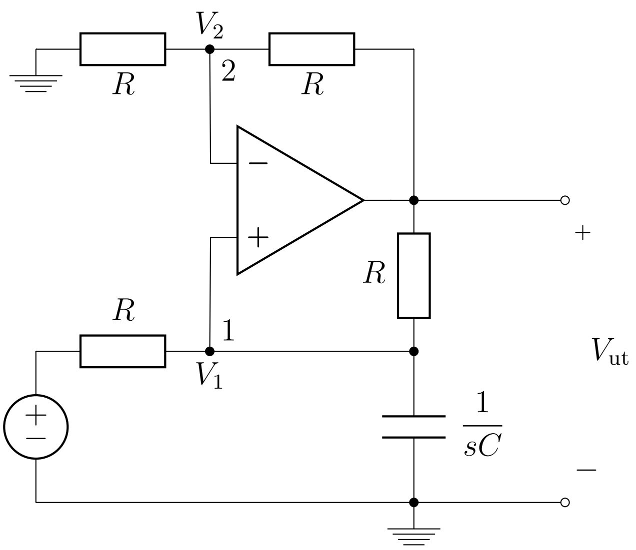
Då $v_{\text{in}}(t) > 0$ är den mittersta dioden kortsluten medan de andra två är avbrott. Det gör att

$$v_1(t) = v_3(t) = \frac{V_0}{2}\sin(\omega t) \quad \text{och } v_2(t) = 0$$

Då $v_{\text{in}}(t) < 0$ är den mittersta dioden ett avbrott medan de andra två är kortslutna. Det gör att

$$v_1(t) = v_3(t) = 0 \quad \text{och } v_2(t) = V_0\sin(\omega t)$$

4



Transformera kretsen till Laplace-planet enligt ovan. Använd nodanalys på noderna 1 och 2, vilka har samma potential $V_1 = V_2$.

$$\text{Nod 1:} \qquad \frac{V_1 - V_s}{R} + \frac{V_1 - 0}{\frac{1}{sC}} + \frac{V_1 - V_{ut}}{R} = 0$$

$$\text{Nod 2:} \qquad \frac{V_1 - 0}{R} + \frac{V_1 - V_{ut}}{R} = 0$$

KCL för nod 2 ger $V_{ut} = 2V_1$ som insatt i KCL för nod 1 ger

$$V_{ut}(s) = \frac{2V_s}{sRC} \quad \Rightarrow \quad v_{ut}(t) = \frac{2}{RC}\int_0^t v_s(\tau)\,d\tau = \frac{2V_0}{RC}\int_0^t \sin(\omega\tau)\,d\tau$$

<u>Svar:</u>

$$v_\mathrm{s}(t) = \frac{2V_0}{\omega RC}\left(1-\cos(\omega t)\right)H(t)$$

5

Strömmen ges av

$$i_\mathrm{D} = K\left(v_\mathrm{GS} - V_\mathrm{t0}\right)^2 \tag{1}$$

i mättnadsområdet. Spänningen $v_\mathrm{GS}(t)$ är

$$v_\mathrm{GS}(t) = V_\mathrm{GSQ} + M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t)$$

Insatt i (**??**)

$$\begin{aligned} i_\mathrm{D}(t) &= K\big(V_\mathrm{GSQ} + M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t) - V_\mathrm{t0}\big)^2 \\ &= K\big((V_\mathrm{GSQ}-V_\mathrm{t0})^2 + M^2\cos^2(\omega_\mathrm{c}t) + A^2\cos^2(\omega_1 t) + 2(V_\mathrm{GSQ}-V_\mathrm{t0})(M\cos(\omega_\mathrm{c}t) + A\cos(\omega_1 t))\big) \\ &\qquad + 2KMA\cos(\omega_\mathrm{c}t)\cos(\omega_1 t) \end{aligned}$$

Det är bara den sista termen som innehåller de intressanta termerna (de övriga termerna innehåller DC, ursprungliga frekvenser och dubbla frekvenser). Den sista termen kan skrivas

$$2KMA\cos(\omega_\mathrm{c}t)\cos(\omega_1 t) = KMA\big(\cos([\omega_\mathrm{c}+\omega_1]t) + \cos([\omega_\mathrm{c}-\omega_1]t)\big)$$

<u>Svar:</u> Strömmen $i_\mathrm{D}(t)$ enligt ovan. Amplituden för frekvenskomponenterna $\omega_\mathrm{c} \pm \omega_1$ är KMA.

6

(a) Den komplexa effekten ges av $S = \frac{1}{2}VI^* = \frac{1}{2}Z|I|^2$, så bestämmer först strömmen genom spolen och kondensatorn

$$I_\mathrm{L} = \frac{V_\mathrm{in}}{R + \mathrm{j}\omega L} \quad \text{och } I_\mathrm{C} = \frac{V_\mathrm{in}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}$$

De komplexa effekterna är

$$S_\mathrm{L} = \frac{1}{2}(R + \mathrm{j}\omega L)\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{och } S_\mathrm{C} = \frac{1}{2}(R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

som ger de reaktiva effekterna

$$Q_\mathrm{L} = \frac{\omega L}{2}\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{och } Q_\mathrm{C} = \frac{-1}{2\omega C}\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

(b) För fallet $R = \sqrt{L/C}$ har vi

$$Q_\mathrm{L} = \frac{\omega L}{2}\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{L/C + \omega^2 L^2} \quad \text{och } Q_\mathrm{C} = \frac{-\omega L}{2\omega^2 LC}\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{L/C + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{-\omega L}{2}\frac{|V_\mathrm{in}|^2}{\omega^2 L^2 + L/C} = -Q_\mathrm{L}$$

Den totala reaktiva effekten är därmed $Q = 0$.

(c) Kretsen är frekvensoberoende och rent resistiv med $Z(\omega) = R$.