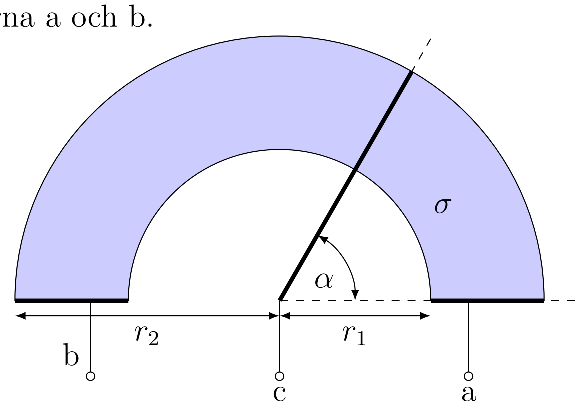
Tentamen i ETE115/EITF90 Ellära och elektronik, 6/4 2018

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i kretsteori.
Observera att uppgifterna inte är sorterade i svårighetsordning. Alla lösningar skall ges tydliga motiveringar.

1

Potentiometern är ett reglerbart motstånd med tre anslutningar, i figuren a,b,c. Den har en vridbar glidkontakt som ligger an mot en resistiv bana. Figuren visar en område bestående av en halvcirkel med radierna r_1 och r_2 och med tjocklek d in i papperet, samt ledningsförmåga σ. De tjocka linjerna vid anslutningarna a och b är metallbelagda.
Potentiometerns anslutning c är vriden en vinkel α, enligt figuren.
Tjockleken d antas vara mycket tunn $d \ll r_2$ så du kan anta att c är kopplad till den resistiva banan på samma sätt som anslutningarna a och b.

1. Bestäm resistansen R_{ab}.
2. Bestäm resistansen R_{ac}.
3. Bestäm resistansen R_{bc}.



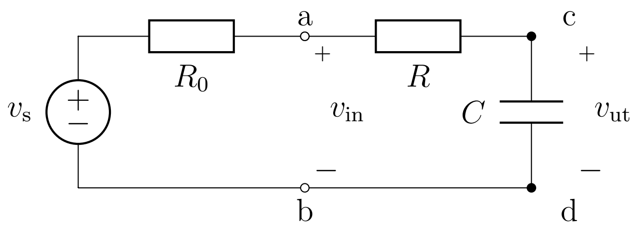
2

Bestäm $v_{\mathrm{in}}(t)$ och $v_{\mathrm{ut}}(t)$ för fallen

a: $v_{\mathrm{s}}(t) = V_0 \cos(\omega t)$

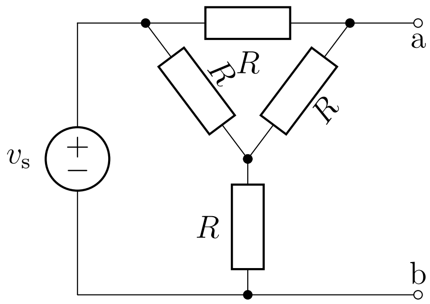
b: $v_{\mathrm{s}}(t) = V_0 \cos(\omega t)$ med $R \gg R_0$

c: $v_{\mathrm{s}}(t) = V_0 \mathrm{H}(t)$ med $R \gg R_0$ (där enhetssteget betecknas H och $v_{\mathrm{ut}}(t) = 0$ för $t < 0$)

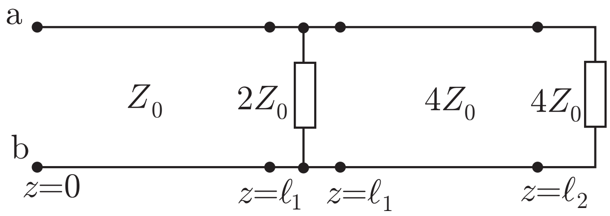


3

Bestäm Thévenin-ekvivalenten med avseende på nodparet ab. Spänningen v_{s} och resistansen R är givna.



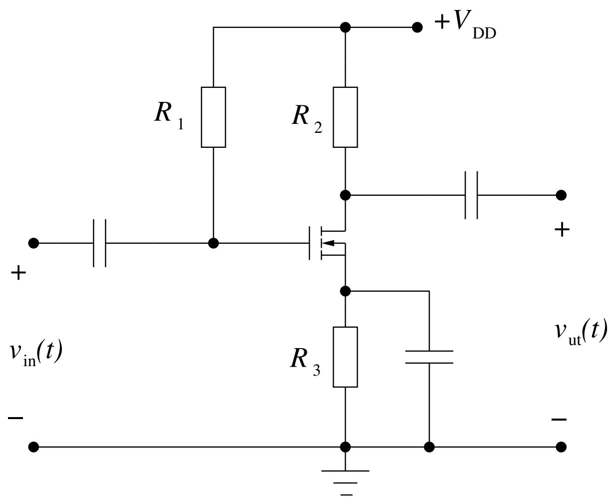
4



Bestäm impedansen mellan nodparet ab. Kopplingen består av två transmissionsledningar med karakteristiska impedanser Z_0 och $4Z_0$.

5

I nedanstående krets kan alla kapacitanser betraktas som kopplingskapacitanser, dvs de spärrar för likspänningar (matningsspänningen $+V_{\mathrm{DD}}$) och kortsluter för tidsvarierande signaler (insignalen $v_{\mathrm{in}}(t)$).

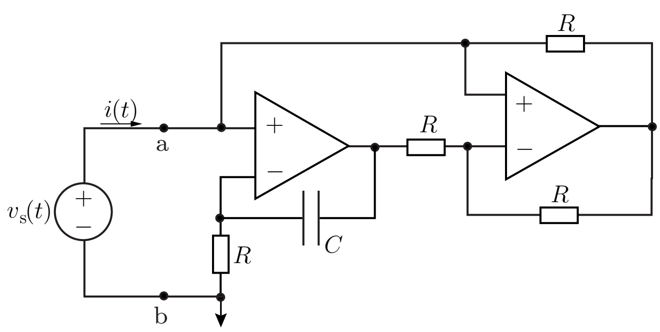


a) Bestäm R_3 uttryckt i transistorns arbetspunkt ($V_{\mathrm{GSQ}}, I_{\mathrm{DQ}}$) och matningsspänningen V_{DD}.

b) Rita småsignalschema för kretsen och bestäm $v_{\mathrm{ut}}(t)$ uttryckt i $v_{\mathrm{in}}(t)$, g_{m} samt resistanserna i figuren ovan. Antag att transistorns drain-resistans $r_{\mathrm{d}} \approx \infty$.

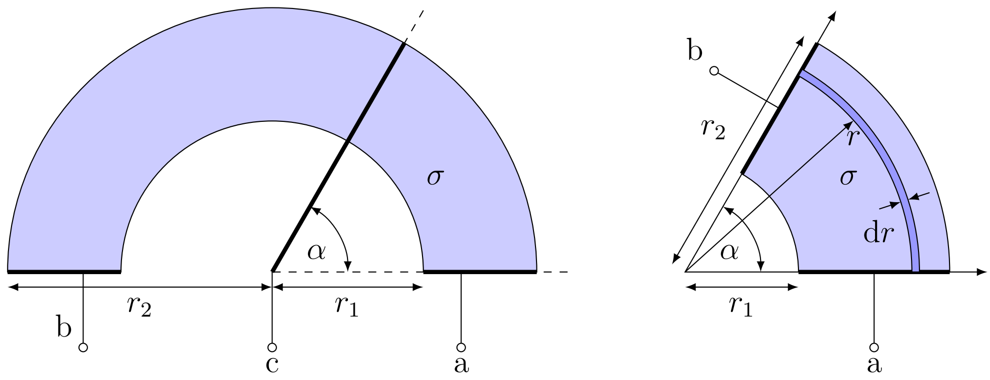
6

Kretsen i figuren visar en gyrator kopplad till en spänningskälla. Bestäm strömmen $i(t)$ då $v_{\mathrm{s}}(t) = V_{\mathrm{m}} \cos(\omega t)$. Bestäm impedansen för gyratorn. Vilket passivt kretselement kan ersätta gyratorn?



Lösningar

1



De olika fallen 1,2,3 kan bestämmas från resistansen av en cirkelsektor med öppningsvinkel $\alpha, \pi - \alpha, \pi$.

Symmetrin ger att strömmen går längs cirkelbanor (konstant radie), och vi kan dela upp geometrin i flera parallella rör enligt nedan: Ett sådant rör har konduktans (formelsamling)

$$\mathrm{d}G = \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{\ell} = \frac{\sigma d\,\mathrm{d}r}{r\alpha}$$

där $\mathrm{d}S = d\,\mathrm{d}r$ är tvärsnittsytan på röret och $\ell = r\alpha$ är dess längd. Samtliga rör är parallellkopplade mellan a och b, varför vi får konduktansen

$$G = \int \mathrm{d}G = \int_{r=r_1}^{r_2} \frac{\sigma d\,\mathrm{d}r}{r\alpha} = \frac{\sigma d}{\alpha}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\sigma d}{\alpha}\left[\ln r\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma d}{\alpha}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

och resistansen

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\alpha}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$$

Svar:

1. Resistansen R_{ab} ges av fallet $\alpha = \pi$

$$R_{\mathrm{ab}} = \frac{\pi}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$$

2. Resistansen R_{ac} är

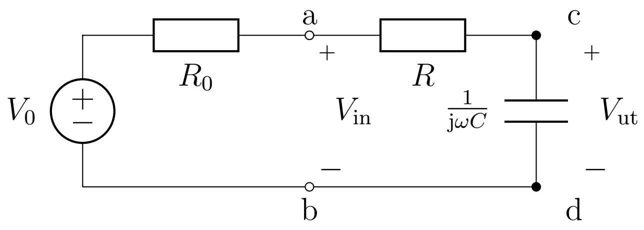
$$R_{\mathrm{ac}} = \frac{\alpha}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$$

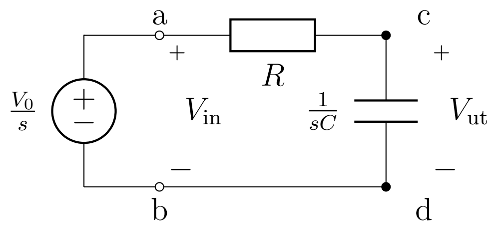
3. Resistansen R_{bc} ges av $\pi - \alpha$

$$R_{\mathrm{bc}} = \frac{\pi - \alpha}{\sigma d\ln(r_2/r_1)}$$

Observera att $R_{\mathrm{ab}} = R_{\mathrm{ac}} + R_{\mathrm{bc}}$

2





a) tidsharmonisk signal så transformera till frekvensdomän $v_{\text{s}}(t) = \text{Re}\{V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} \to V_0$. Spänningarna bestäms med spänningsdelning (eller bestäm först strömmen)

$$V_{\text{in}} = V_0 \frac{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_0 + R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = V_0 \frac{\mathrm{j}\omega CR + 1}{\mathrm{j}\omega C(R_0 + R) + 1} = V_0 \frac{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}}{\sqrt{(\omega C(R_0 + R))^2 + 1}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\arctan(\omega RC)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan(\omega(R+R_0)C)}}$$

$$= V_0 \sqrt{\frac{(\omega CR)^2 + 1}{(\omega C(R_0 + R))^2 + 1}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\arctan(\omega RC) - \arctan(\omega(R+R_0)C)}$$

och

$$V_{\text{ut}} = V_0 \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R_0 + R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = V_0 \frac{1}{\mathrm{j}\omega C(R_0 + R) + 1} = V_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega C(R_0 + R))^2 + 1}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan(\omega(R+R_0)C}$$

Transformera tillbaka till tidsplanet

$$v_{\text{in}}(t) = \text{Re}\{V_{\text{in}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0 \sqrt{\frac{(\omega CR)^2 + 1}{(\omega C(R_0 + R))^2 + 1}} \cos(\omega t + \arctan(\omega RC) - \arctan(\omega(R+R_0)C))$$

och

$$v_{\text{ut}}(t) = \text{Re}\{V_{\text{ut}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega C(R_0 + R))^2 + 1}} \cos(\omega t - \arctan(\omega(R + R_0)C))$$

b) med $R \gg R_0$ kan vi försumma R_0 så fallet förenklas till

$$v_{\text{in}}(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

och

$$v_{\text{ut}}(t) = V_0 \frac{1}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}} \cos(\omega t - \arctan(\omega RC))$$

c) med $R \gg R_0$ kan vi försumma R_0 så

$$v_{\text{in}}(t) = v_{\text{s}}(t) = V_0 \text{H}(t)$$

Uppladdningen av kondensatorn kan bestämmas på många sätt (se kursbok). Med Laplacetransform

$$V_{\text{ut}}(s) = V_{\text{in}}(s) \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{V_0}{s} \frac{1}{1 + sRC} = \frac{V_0}{s} \frac{1/(RC)}{1/(RC) + s}$$

transformera tillbaka till tidsplanet (formelsamling #7)

$$v_{\text{ut}}(t) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-t/(RC)})$$

<u>Svar:</u>

a

$$v_{\mathrm{in}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{in}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0\sqrt{\frac{(\omega CR)^2+1}{(\omega C(R_0+R))^2+1}}\cos(\omega t+\arctan(\omega RC)-\arctan(\omega(R+R_0)C))$$

och

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{ut}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\} = V_0\frac{1}{\sqrt{(\omega C(R_0+R))^2+1}}\cos(\omega t-\arctan(\omega(R+R_0)C))$$

b

$$v_{\mathrm{in}}(t) = V_0\cos(\omega t)$$

och

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = V_0\frac{1}{\sqrt{(\omega CR)^2+1}}\cos(\omega t-\arctan(\omega RC))$$

c

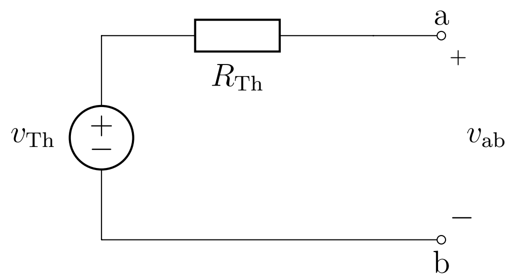
$$v_{\mathrm{in}}(t) = v_{\mathrm{s}}(t) = V_0\mathrm{H}(t)$$

och

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = V_0(1-\mathrm{e}^{-t/(RC)})$$

3

Jämför kretsen med en Thevéninekvivalent. Tomgångsspänning

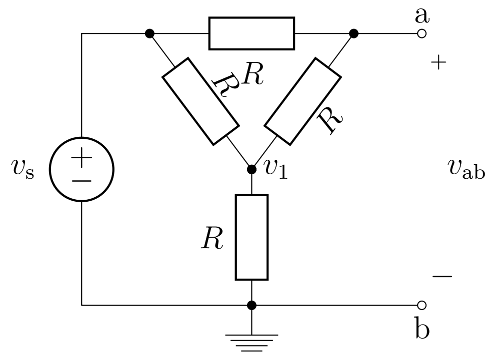


$$v_{ab} = v_{Th}$$

och med nollställda källor ($v_{Th} = 0$)

$$R_{ab} = R_{Th}$$

Tomgångsspänning (Thevéninspänningen) bestäms med nodanalys. KCL på nod a



$$\frac{v_{ab} - v_s}{R} + \frac{v_{ab} - v_1}{R} = 0 \qquad \Rightarrow 2v_{ab} = v_s + v_1$$

och på nod 1

$$\frac{v_1 - v_s}{R} + \frac{v_1 - v_{ab}}{R} + \frac{v_1 - 0}{R} = 0 \qquad \Rightarrow 3v_1 = v + v_{ab}$$

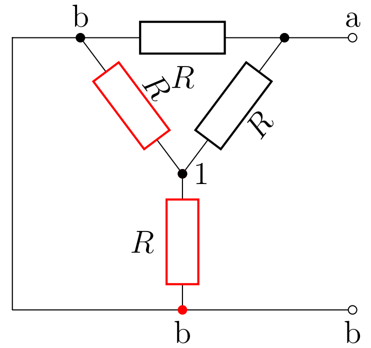
Eliminera v_1

$$3(2v_{ab} - v_s) = v_s + v_{ab}$$

och lös ut v_{ab}

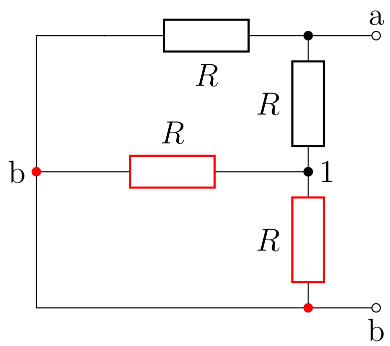
$$v_{ab} = \frac{4v_s}{5} = v_{Th}$$

Nollställ spänningskällan för att bestämma resistansen. Rita om nätet för att enklast se att resistanserna mellan nod 1 och nod b är parallellkopplade. Ersättningsresistansen



$$\frac{R^2}{R + R} = \frac{R}{2}$$

för de parallellkopplade elementen ger en krets med tre element enligt figuren. Thevéninresistansen ges slutligen av en parallellkoppling mellan $R + R/2$ och R, dvs

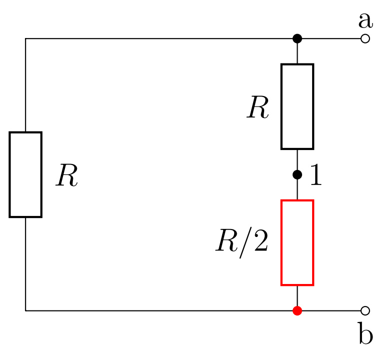


$$R_{Th} = R\frac{3/2}{3/2 + 1} = \frac{3R}{5}$$

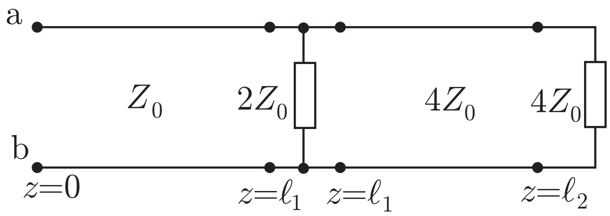
Resistansen kan alternativt bestämmas med $Y\Delta$-transform eller genom kortslutningsströmmen.

Svar: Thevéninekvivalent med

$$v_{Th} = \frac{4v_s}{5} \quad \text{och } R_{Th} = \frac{3R}{5}$$



4



Lasten till $4Z_0$ ledningen är anpassad vilket ger reflektionsfaktorn $\Gamma_2 = 0$. Det ger en parallellkoppling mellan $2Z_0$ och $4Z_0$,

$$Z_0 \frac{2 \cdot 4}{2+4} = Z_0 \frac{4}{3}$$

som avslutning på ledningen vid $z = \ell_1$ och reflektionsfaktor

$$\Gamma_1 = \frac{4/3 - 1}{4/3 + 1} = \frac{4-3}{4+3} = 1/7.$$

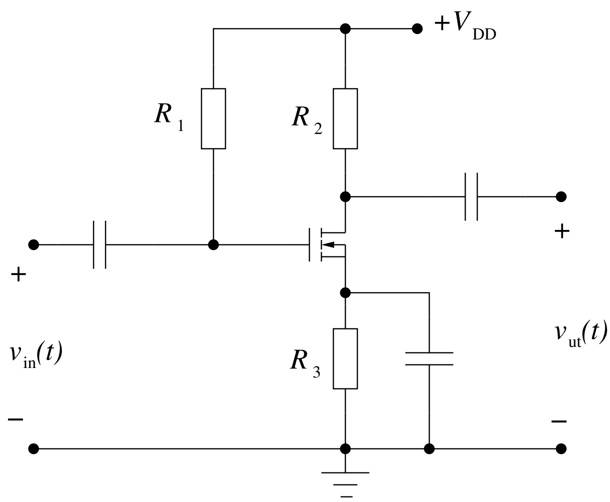
Inimpedansen ges av formelsamling.

Svar:

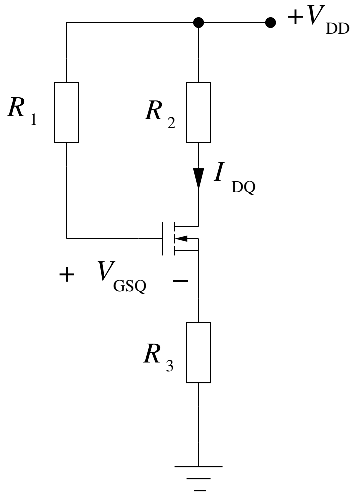
$$Z_{\mathrm{ab}} = Z_0 \frac{7 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell_1}}{7 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\beta\ell_1}} = Z_0 \frac{4\cos(\beta\ell_1) + \mathrm{j}3\sin(\beta\ell_1)}{3\cos(\beta\ell_1) + \mathrm{j}4\sin(\beta\ell_1)}$$

där β är vågtalet för ledningen.

5



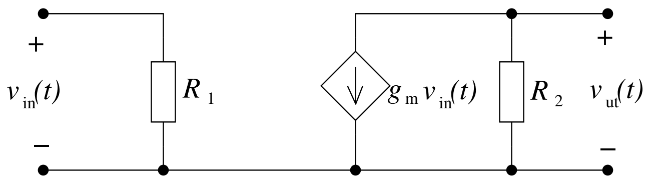
a) Ersätt kondensatorerna med avbrott för att få det ekvivalenta schemat för storsignalen



Eftersom ingen ström går genom R_1 är potentialen vid gate lika med V_{DD}, medan potentialen vid source är $R_3 I_{\mathrm{DQ}}$. Detta ger spänningen mellan gate och source

$$V_{\mathrm{GSQ}} = V_{\mathrm{DD}} - R_3 I_{\mathrm{DQ}} \quad \Longrightarrow \quad R_3 = \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{GSQ}}}{I_{\mathrm{DQ}}}$$

b) Småsignalschemat får genom att ersätta kondensatorerna med kortslutningar (kortsluter R_3) och spänningen V_{DD} med jord (R_1 på ingången och R_2 på utgången). Spänningen $v_{\mathrm{gs}} = v_{\mathrm{in}}$ ger



Utspänningen är

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = -R_2 g_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{in}}(t)$$

Svar:

a

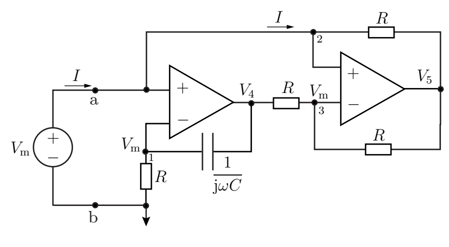
$$R_3 = \frac{V_{\mathrm{DD}} - V_{\mathrm{GSQ}}}{I_{\mathrm{DQ}}}$$

b Se figur för småsignalschemat och utsignal

$$v_{\mathrm{ut}}(t) = -R_2 g_{\mathrm{m}} v_{\mathrm{in}}(t)$$

6

Transformera först till frekvensdomänen med realdelskonventionen $v_{\mathrm{s}}(t) = \mathrm{Re}\{V_{\mathrm{m}} e^{\mathrm{j}\omega t}\} \to V_{\mathrm{m}}$. Den ekvivalenta kretsen i frekvensplanet visas i figuren, där också noderna 1,2,3 har definierats. De ideala operationsförstärkarna ger nodpotentialen V_{m} i noderna 1,2,3.



Nodanalys ger

$$
\begin{aligned}
&\frac{V_\mathrm{m}-0}{R}+\frac{V_\mathrm{m}-V_4}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=0 && \Rightarrow \quad V_\mathrm{m}=-\mathrm{j}\omega RC(V_\mathrm{m}-V_4) && \text{(nod 1)}\\
&-I+\frac{V_\mathrm{m}-V_5}{R}=0 && \Rightarrow \quad V_\mathrm{m}-V_5=IR && \text{(nod 2)}\\
&\frac{V_\mathrm{m}-V_4}{R}+\frac{V_\mathrm{m}-V_5}{R}=0 && \Rightarrow \quad V_\mathrm{m}-V_4=-(V_\mathrm{m}-V_5) && \text{(nod 3)}
\end{aligned}
$$

och därmed totalt

$$
V_\mathrm{m}=\mathrm{j}\omega R^2CI \quad \text{och } I=\frac{1}{\mathrm{j}\omega R^2C}V_\mathrm{m}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}}{\omega R^2C}V_\mathrm{m}
$$

Impedansen för gyratorn ges av

$$
Z=\frac{V_\mathrm{m}}{I}=\mathrm{j}\omega R^2C=\mathrm{j}\omega L
$$

där $L=R^2C$. Gyratorn kan därmed ersättas av en induktor med induktansen $L=R^2C$.

Transformera tillbaks till tidsdomänen

$$
i(t)=\mathrm{Re}\{I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}=\mathrm{Re}\{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\pi/2)}}{\omega R^2C}V_\mathrm{m}\}=\frac{V_\mathrm{m}}{\omega R^2C}\cos(\omega t-\pi/2)
$$

Svar:

$$
\boxed{i(t)=\frac{V_\mathrm{m}}{\omega R^2C}\cos(\omega t-\pi/2), \quad Z=\mathrm{j}\omega R^2C=\mathrm{j}\omega L \text{ och en induktor med } L=R^2C}
$$