ETE115 Ellära och elektronik
Föreläsning 2

Mats Gustafsson

mats.gustafsson@eit.lth.se
Institutionen för Elektro- och informationsteknik

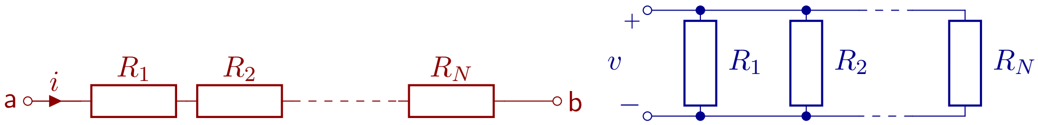
Lunds universitet

Mars 2017

Outline

Outline

Serie- och parallellkoppling (2.1,2.2)



Från föregående föreläsning:

- Seriekoppling: $R_{\text{ekv}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$ (samma ström i)
- Parallellkoppling: $\dfrac{1}{R_{\text{ekv}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}$ (samma spänning v)

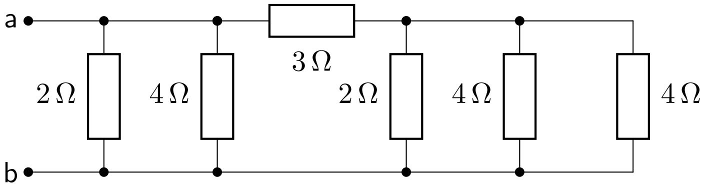
Specialfall: två parallellkopplade resistanser: $R_{\text{ekv}} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

Storheten $1/R = G$ kallas för *konduktans* och har enhet $1/\Omega = \mathrm{S} = \mathrm{Siemens}$.

Minnesregel vid rimlighetskontroll: $R_{\text{ekv,serie}} \geq R_n$ och $R_{\text{ekv,parallell}} \leq R_n$ för alla R_n.

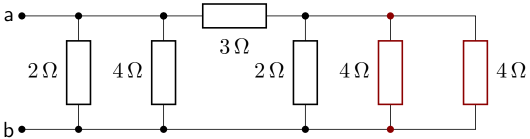
Ersättningsresistans, R_{ab}

Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen



Ersättningsresistans, R_{ab}

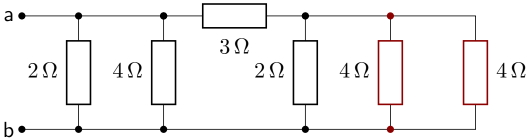
Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen

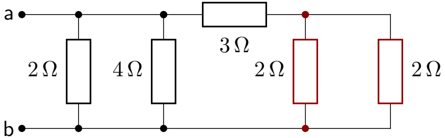


$$4\,\Omega \parallel 4\,\Omega = \frac{4 \cdot 4}{4+4}\,\Omega = 2\,\Omega$$

Ersättningsresistans, R_{ab}

Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen

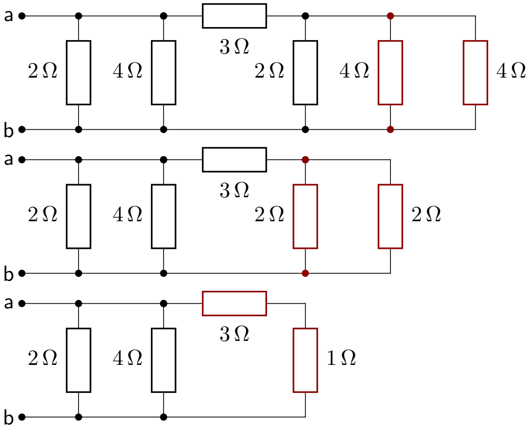




$$2\,\Omega \parallel 2\,\Omega = \frac{2 \cdot 2}{2+2}\,\Omega = 1\,\Omega$$

Ersättningsresistans, R_{ab}

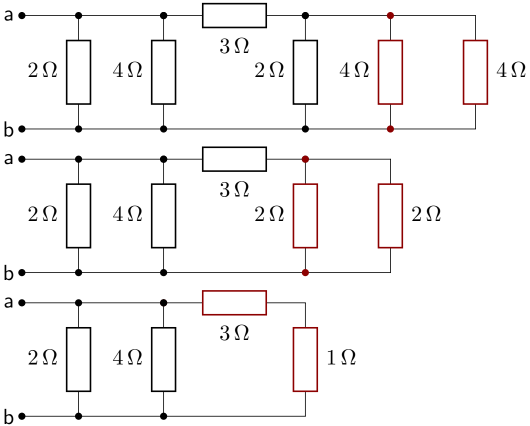
Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen

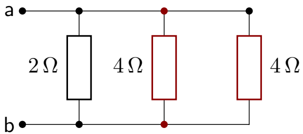


$$3\,\Omega + 1\,\Omega = 4\,\Omega$$

Ersättningsresistans, R_{ab}

Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen

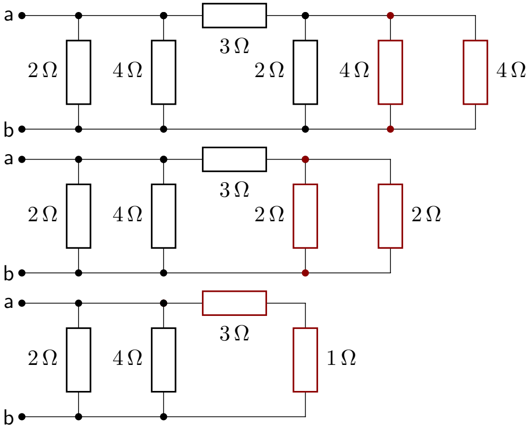


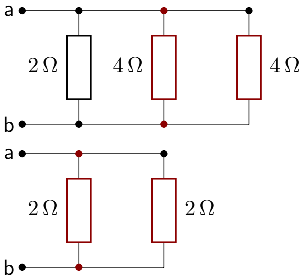


$$4\,\Omega \parallel 4\,\Omega = \frac{4 \cdot 4}{4+4}\,\Omega = 2\,\Omega$$

Ersättningsresistans, R_{ab}

Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen

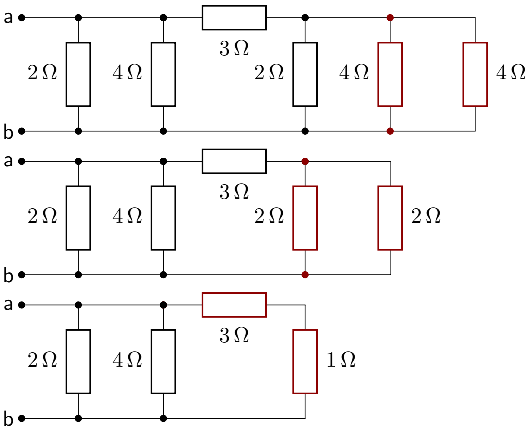


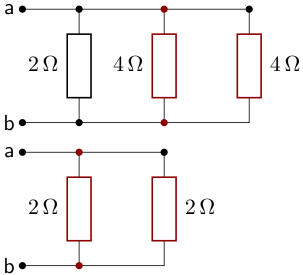


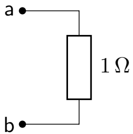
$$2\,\Omega \parallel 2\,\Omega = \frac{2\cdot 2}{2+2}\,\Omega = 1\,\Omega$$

Ersättningsresistans, R_{ab}

Använd serie och parallellkopplingar för att förenkla kretsen



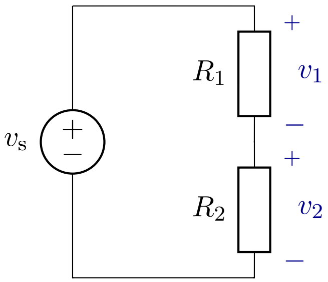




$$R_{\mathrm{ab}} = 1\,\Omega$$

Spänningsdelning (2.3) och strömgrening (2.4)

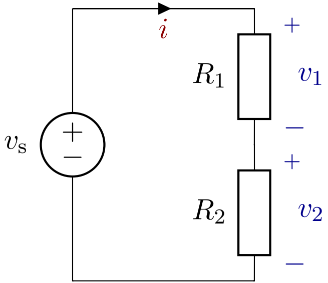
- Spänningsdelning är ett enkelt samband mellan delspänningarna v_1 och v_2 över seriekopplade resistanser och den totala spänningen v_s



Spänningsdelning (2.3) och strömgrening (2.4)

- Spänningsdelning är ett enkelt samband mellan delspänningarna v_1 och v_2 över seriekopplade resistanser och den totala spänningen v_s

$$v_1 \overset{\text{Ohm}}{=} iR_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v_\text{s}}{R_1 + R_2} R_1 = v_\text{s} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

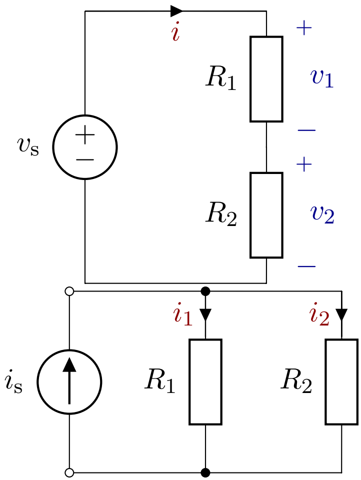


Spänningsdelning (2.3) och strömgrening (2.4)

- Spänningsdelning är ett enkelt samband mellan delspänningarna v_1 och v_2 över seriekopplade resistanser och den totala spänningen v_s

$$v_1 \overset{\text{Ohm}}{=} iR_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v_\mathrm{s}}{R_1 + R_2} R_1 = v_\mathrm{s} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

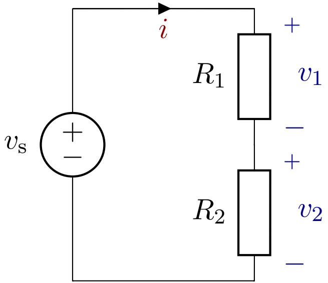
- Strömgrening är ett enkelt samband mellan delströmmarna i_1 och i_2 genom parallellkopplade resistanser och den totala strömmen i_s



Spänningsdelning (2.3) och strömgrening (2.4)

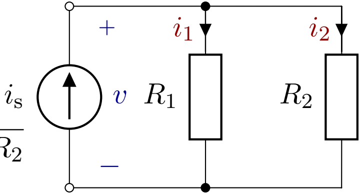
- Spänningsdelning är ett enkelt samband mellan delspänningarna v_1 och v_2 över seriekopplade resistanser och den totala spänningen v_s

$$v_1 \overset{\text{Ohm}}{=} iR_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v_\mathrm{s}}{R_1 + R_2} R_1 = v_\mathrm{s} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



- Strömgrening är ett enkelt samband mellan delströmmarna i_1 och i_2 genom parallellkopplade resistanser och den totala strömmen i_s

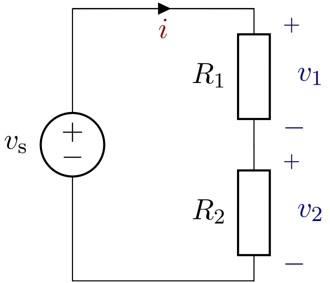
$$i_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v}{R_1} \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{i_\mathrm{s}(R_1 \parallel R_2)}{R_1} = \frac{i_\mathrm{s} R_1 R_2}{R_1(R_1 + R_2)} = i_\mathrm{s} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



Spänningsdelning (2.3) och strömgrening (2.4)

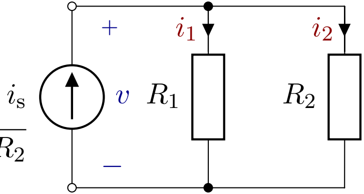
- Spänningsdelning är ett enkelt samband mellan delspänningarna v_1 och v_2 över seriekopplade resistanser och den totala spänningen v_s

$$v_1 \overset{\text{Ohm}}{=} iR_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v_\mathrm{s}}{R_1+R_2}R_1 = v_\mathrm{s}\frac{R_1}{R_1+R_2}$$



- Strömgrening är ett enkelt samband mellan delströmmarna i_1 och i_2 genom parallellkopplade resistanser och den totala strömmen i_s

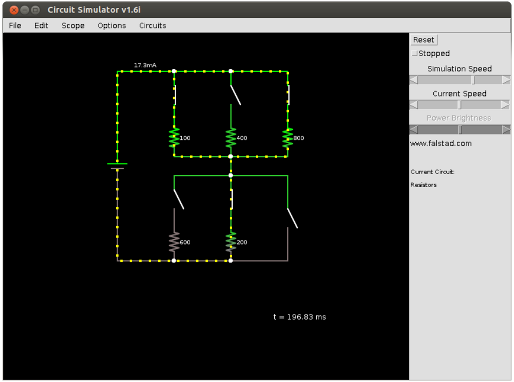
$$i_1 \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{v}{R_1} \overset{\text{Ohm}}{=} \frac{i_\mathrm{s}(R_1 \parallel R_2)}{R_1} = \frac{i_\mathrm{s}R_1R_2}{R_1(R_1+R_2)} = i_\mathrm{s}\frac{R_2}{R_1+R_2}$$



Enkla men mycket användbara samband. Observera likheter och skillnader.

Datorillustrationer

Om ni vill experimentera mer på egen hand med visualisering och simulering kan ni använda följande program:



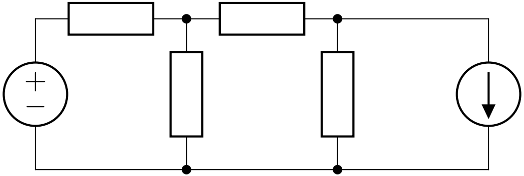
http://falstad.com/circuit

Det går både att köra direkt i webbläsaren, eller ladda ned java-koden och köra offline.

Outline

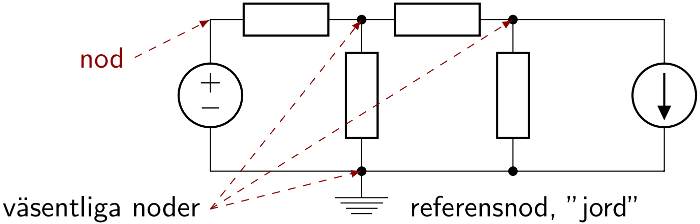
Nodanalys (2.5)

Nodanalys är en generell metod för att analysera en allmän krets. Den kan automatiseras och utgör grunden för kretssimuleringar med dator.



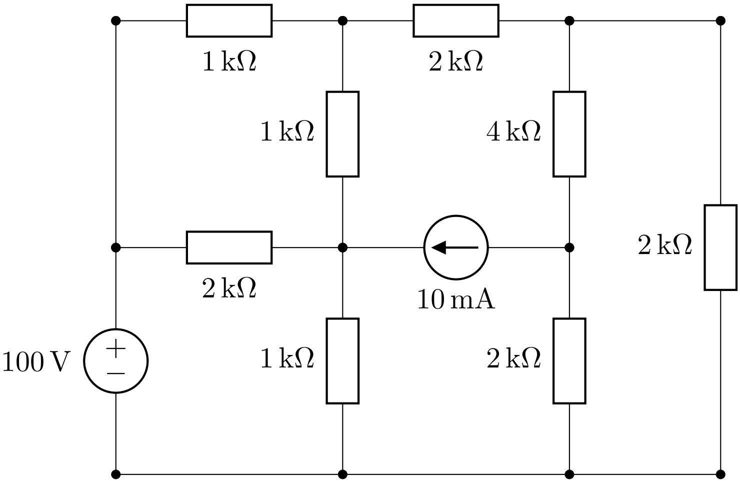
Nodanalys (2.5)

Nodanalys är en generell metod för att analysera en allmän krets. Den kan automatiseras och utgör grunden för kretssimuleringar med dator.

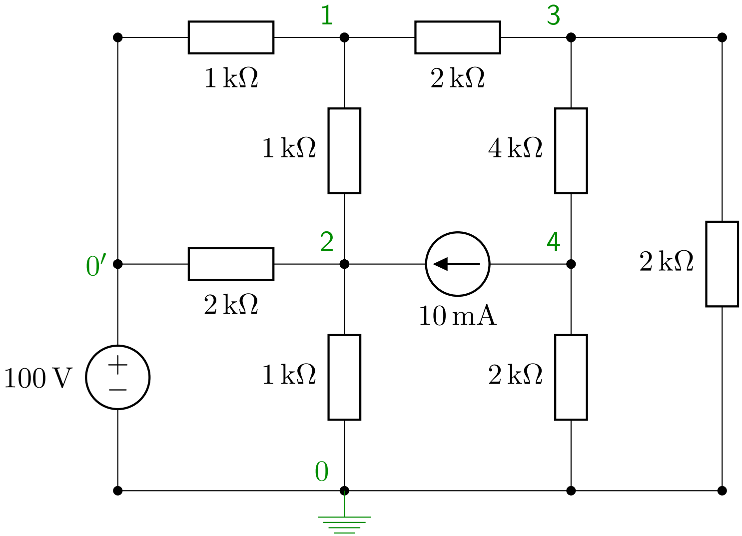


- Numrera noderna från 0 till N.
- Definiera nodpotentialer $\{v_n\}_{n=0}^{N}$.
- Låt referensnoden (jord) ha $v_0 = 0$.
- Sätt upp KCL i alla noder, t.ex. med grenströmmar $i_{12} = \dfrac{v_{12}}{R} = \dfrac{v_1 - v_2}{R}$.
- Lös ekvationssystemet.

Bestäm strömmar och nodpotentialer i kretsen



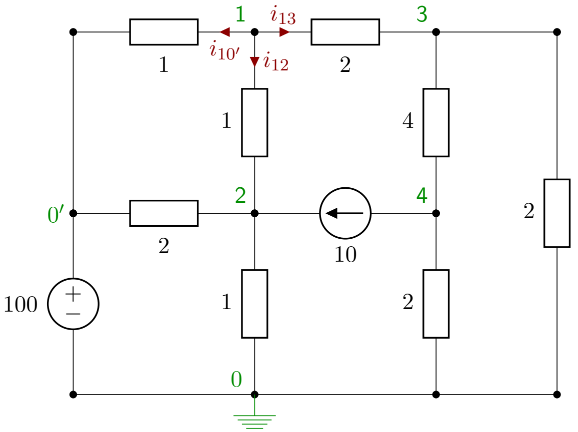
Nodanalys: inför nodpotentialer



- inför noder $n = 0, 0', 1, 2, 3, 4$
- välj 0 som referensnod (jord) med potential $v_0 = 0$
- spänningskällan ger $v_{0'} = 100\,\mathrm{V}$
- inför (okända) nodpotentialer v_n, $n = 1, 2, 3, 4$

Nodanalys, KCL på nod $n = 1, 2, 3, 4$

Nodpotentialer v_n i Volt, strömmar i mA och resistanser i $\mathrm{k}\Omega$

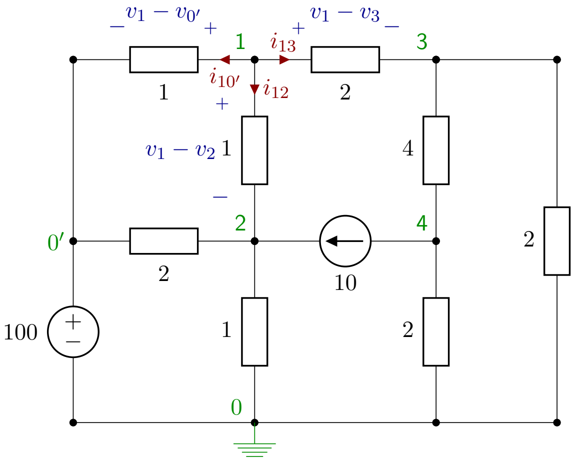


KCL på nod 1

$$i_{10'} + i_{12} + i_{13} = 0$$

Nodanalys, KCL på nod $n = 1, 2, 3, 4$

Nodpotentialer v_n i Volt, strömmar i mA och resistanser i $\mathrm{k}\Omega$



KCL på nod 1

$$i_{10'} + i_{12} + i_{13} = 0$$

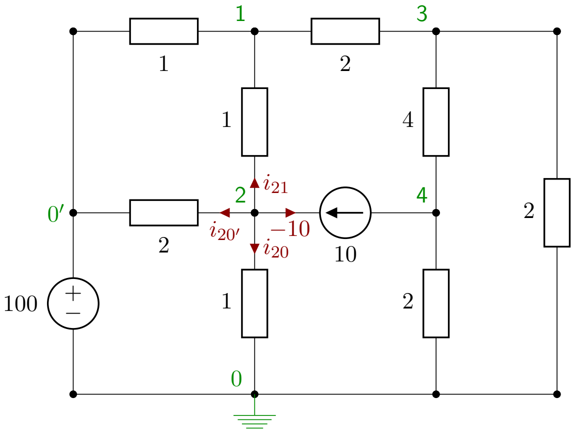
uttryckt i nodpotentialer (Ohm)

$$\frac{v_1 - 100}{1} + \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1 - v_3}{2} = 0$$

där vi använt $v_{0'} = 100\,\mathrm{V}$.

Nodanalys, KCL på nod $n = 1, 2, 3, 4$

Nodpotentialer v_n i Volt, strömmar i mA och resistanser i $\mathrm{k}\Omega$



KCL på nod 2

$$i_{21} + i_{20'} + i_{20} - 10 = 0$$

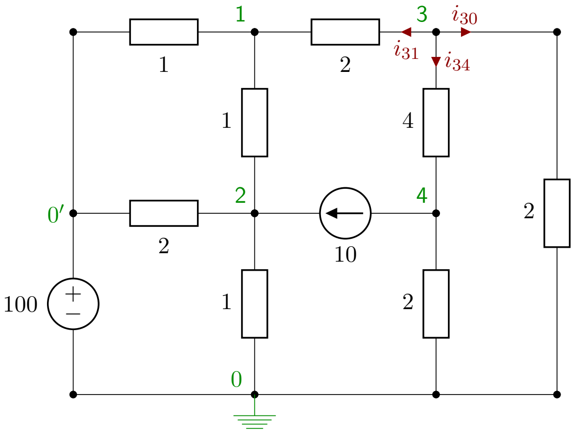
uttryckt i nodpotentialer (Ohm)

$$\frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2 - 100}{2} + \frac{v_2 - 0}{1} - 10 = 0.$$

där vi använt $v_{0'} = 100\,\mathrm{V}$.

Nodanalys, KCL på nod $n = 1, 2, 3, 4$

Nodpotentialer v_n i Volt, strömmar i mA och resistanser i $\mathrm{k}\Omega$



KCL på nod 3

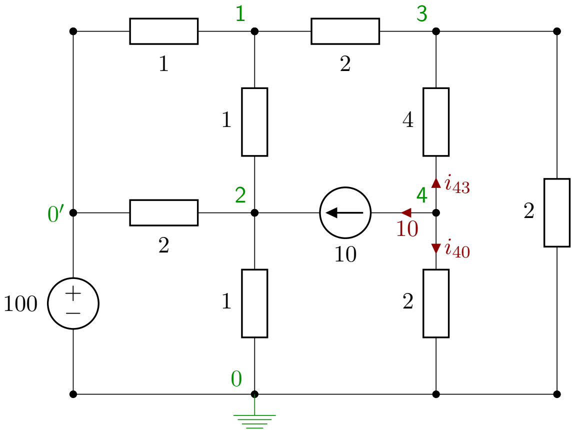
$$i_{31} + i_{34} + i_{30} = 0$$

uttryckt i nodpotentialer (Ohm)

$$\frac{v_3 - v_1}{2} + \frac{v_3 - v_4}{4} + \frac{v_3 - 0}{2} = 0$$

Nodanalys, KCL på nod $n = 1, 2, 3, 4$

Nodpotentialer v_n i Volt, strömmar i mA och resistanser i $\mathrm{k}\Omega$



KCL på nod 4

$$i_{43} + 10 + i_{40} = 0$$

uttryckt i nodpotentialer (Ohm)

$$\frac{v_4 - v_3}{4} + 10 + \frac{v_4 - 0}{2} = 0$$

Nodanalys: ekvationssystem från KCL på noderna (v_n i Volt)

$$
\begin{aligned}
1:&\quad \frac{v_1 - 100}{1} + \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1 - v_3}{2} = 0\\
2:&\quad \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2 - 100}{2} + \frac{v_2 - 0}{1} - 10 = 0\\
3:&\quad \frac{v_3 - v_1}{2} + \frac{v_3 - v_4}{4} + \frac{v_3 - 0}{2} = 0\\
4:&\quad \frac{v_4 - v_3}{4} + 10 + \frac{v_4 - 0}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Förenkla genom att samla v_n-termer och skriv ekvationssystemet på matrisform

Nodanalys: ekvationssystem från KCL på noderna (v_n i Volt)

$$
\begin{aligned}
1:&\quad \frac{v_1-100}{1}+\frac{v_1-v_2}{1}+\frac{v_1-v_3}{2}=0 \Rightarrow \left(1+1+\frac{1}{2}\right)v_1-v_2-\frac{1}{2}v_3=100\\
2:&\quad \frac{v_2-v_1}{1}+\frac{v_2-100}{2}+\frac{v_2-0}{1}-10=0 \Rightarrow -v_1+\left(1+\frac{1}{2}+1\right)v_2=50+10\\
3:&\quad \frac{v_3-v_1}{2}+\frac{v_3-v_4}{4}+\frac{v_3-0}{2}=0 \Rightarrow -\frac{1}{2}v_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)v_3-\frac{1}{4}v_4=0\\
4:&\quad \frac{v_4-v_3}{4}+10+\frac{v_4-0}{2}=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}v_3+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)v_4=-10
\end{aligned}
$$

Nodanalys: ekvationssystem från KCL på noderna (v_n i Volt)

$$1: \quad \frac{v_1 - 100}{1} + \frac{v_1 - v_2}{1} + \frac{v_1 - v_3}{2} = 0 \Rightarrow \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right)v_1 - v_2 - \frac{1}{2}v_3 = 100$$

$$2: \quad \frac{v_2 - v_1}{1} + \frac{v_2 - 100}{2} + \frac{v_2 - 0}{1} - 10 = 0 \Rightarrow -v_1 + \left(1 + \frac{1}{2} + 1\right)v_2 = 50 + 10$$

$$3: \quad \frac{v_3 - v_1}{2} + \frac{v_3 - v_4}{4} + \frac{v_3 - 0}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}v_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)v_3 - \frac{1}{4}v_4 = 0$$

$$4: \quad \frac{v_4 - v_3}{4} + 10 + \frac{v_4 - 0}{2} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}v_3 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)v_4 = -10$$

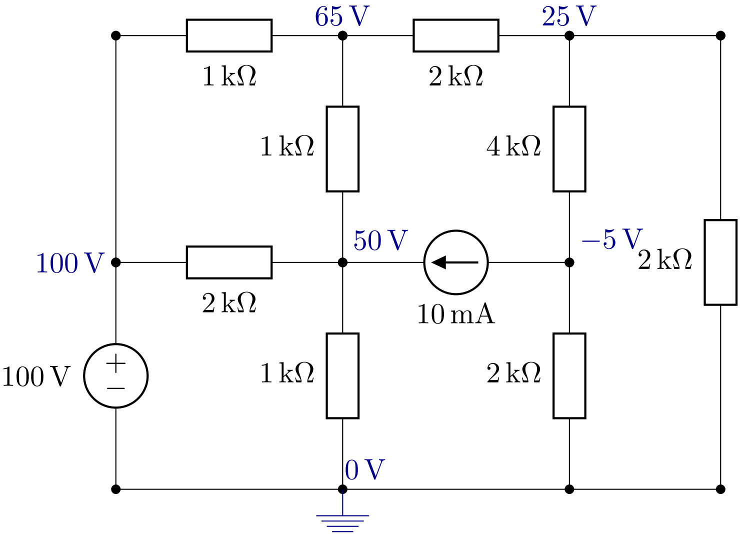
Detta ekvationssystem kan skrivas på matrisform enligt

$$\begin{pmatrix} 2.5 & -1 & -0.5 & 0 \\ -1 & 2.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.25 & -0.25 \\ 0 & 0 & -0.25 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Symmetrisk matris med positiva diagonalelement. Lös ekvationssystemet.

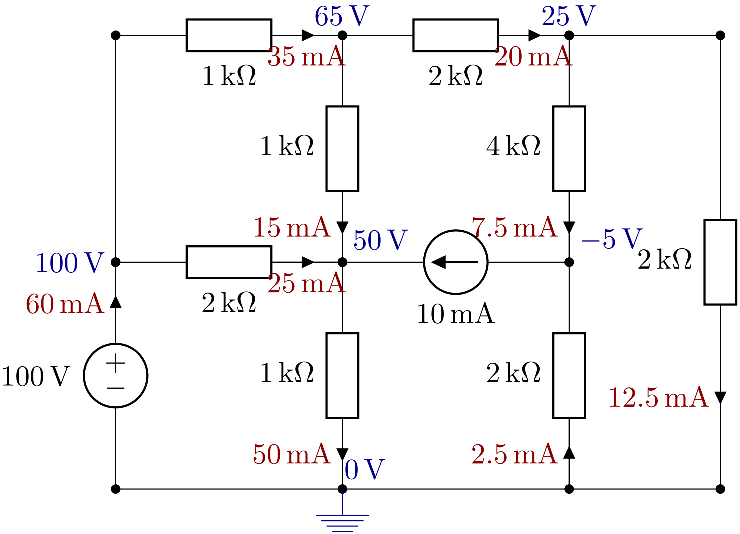
Nodanalys

Med nodpotentialer v_n, $n = 1, 2, 3, 4$



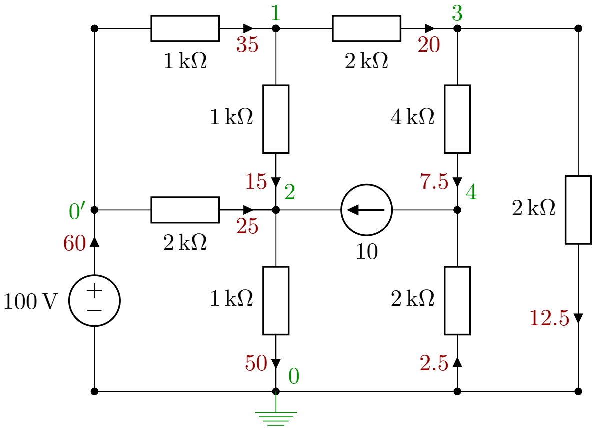
Nodanalys

Strömmar beräknade från nodpotentialerna med Ohms lag



Nodanalys

Verifiera Kirchhoffs strömlag (KCL) på samtliga noder (strömmar givna i mA)



KCL med strömmar i mA

nod 0: $60 - 50 + 2.5 - 12.5 = 0$

nod $0'$: $-60 + 25 + 35 = 0$

(super)nod $0 + 0'$:

$$-50 + 2.5 - 12.5 + 25 + 35 = 0$$

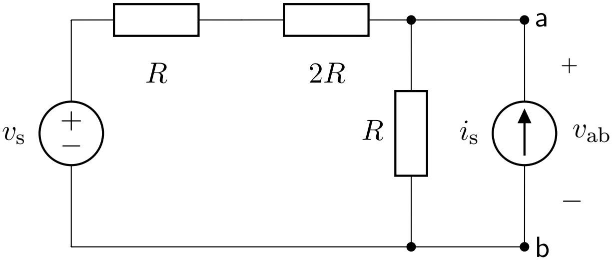
nod 1: $-35 + 15 + 20 = 0$

nod 2: $-25 + 50 - 10 - 15 = 0$

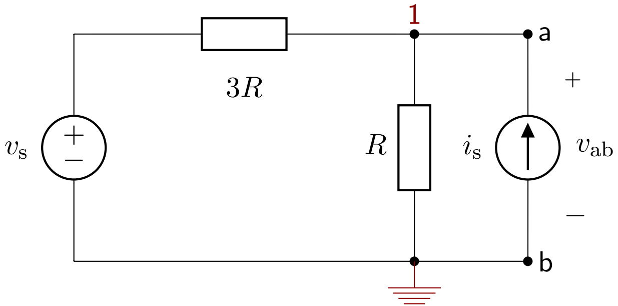
nod 3: $-20 + 7.5 + 12.5 = 0$

nod 4: $10 - 2.5 - 7.5 = 0$

Exempel: bestäm spänningen över nodparet ab

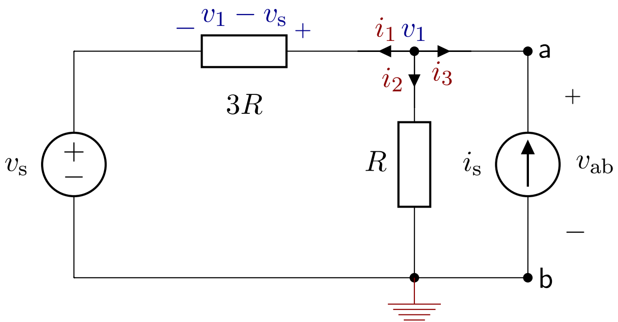


Exempel: bestäm spänningen över nodparet ab



Seriekoppla resistanserna, jorda en nod och inför nod 1 med nodpotential $v_1 = v_{ab}$.

Exempel: bestäm spänningen över nodparet ab



Seriekoppla resistanserna, jorda en nod och inför nod 1 med nodpotential $v_1 = v_{ab}$.
KCL på nod 1

$$i_1 + i_2 + i_3 = \frac{v_1 - v_s}{3R} + \frac{v_1 - 0}{R} - i_s = 0$$

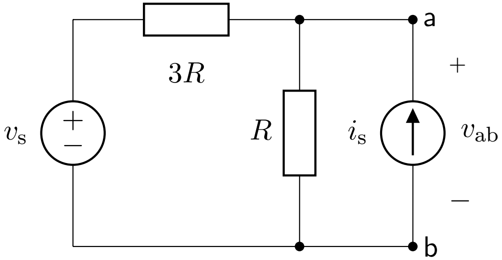
med lösning

$$\left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R}\right) v_1 = \frac{v_s}{3R} + i_s \Rightarrow v_1 = \frac{v_s}{4} + \frac{3}{4} R i_s$$

Superposition

Strömmar och spänningar i en krets kan (också) bestämmas genom att superponera bidragen från olika källor.

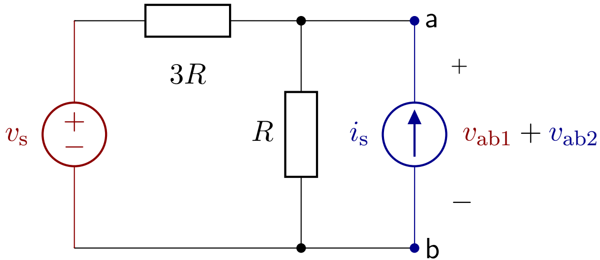
Bestäm spänningen v_{ab}



Superposition

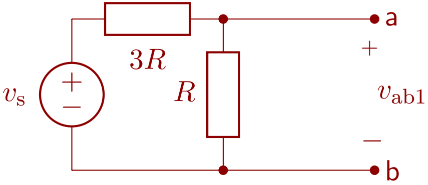
Strömmar och spänningar i en krets kan (också) bestämmas genom att superponera bidragen från olika källor.

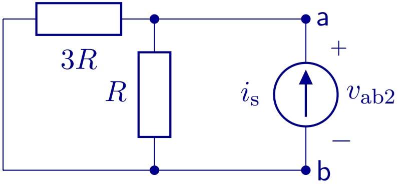
Bestäm spänningen v_{ab}



Dela upp spänningen i två delar $v_{\mathrm{ab}} = v_{\mathrm{ab1}} + v_{\mathrm{ab2}}$, där v_{ab1} bestäms med $i_{\mathrm{s}} = 0$ (ett avbrott) och v_{ab2} med $v_{\mathrm{s}} = 0$ (en kortslutning).

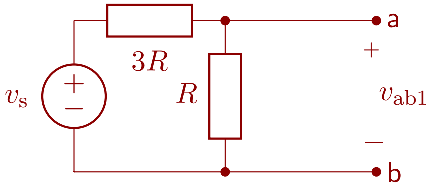
Dela upp spänningen i två delar $v_{\text{ab}} = v_{\text{ab1}} + v_{\text{ab2}}$, där v_{ab1} bestäms med $i_{\text{s}} = 0$ (ett avbrott) och v_{ab2} med $v_{\text{s}} = 0$ (en kortslutning).

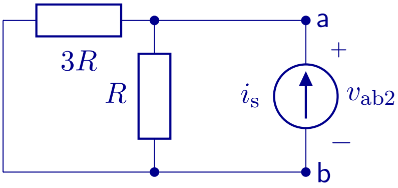




Superposition

Dela upp spänningen i två delar $v_{\mathrm{ab}} = v_{\mathrm{ab1}} + v_{\mathrm{ab2}}$, där v_{ab1} bestäms med $i_{\mathrm{s}} = 0$ (ett avbrott) och v_{ab2} med $v_{\mathrm{s}} = 0$ (en kortslutning).





Med nollställd strömkälla ($i_{\mathrm{s}} = 0$ ett avbrott) och spänningsdelning

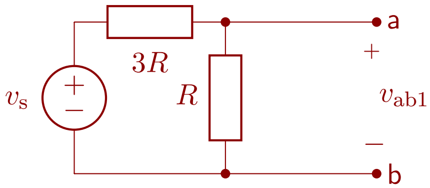
$$v_{\mathrm{ab1}} = v_{\mathrm{s}} \frac{R}{3R + R} = \frac{v_{\mathrm{s}}}{4}$$

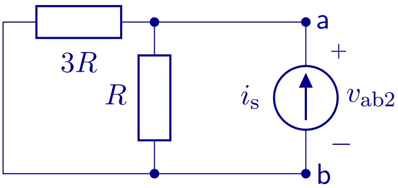
Med nollställd spänningskälla ($v_{\mathrm{s}} = 0$ en kortslutning) och parallellkoppling

$$v_{\mathrm{ab2}} = i_{\mathrm{s}} \frac{3R \cdot R}{3R + R} = i_{\mathrm{s}} \frac{3R}{4}$$

Superposition

Dela upp spänningen i två delar $v_{ab} = v_{ab1} + v_{ab2}$, där v_{ab1} bestäms med $i_s = 0$ (ett avbrott) och v_{ab2} med $v_s = 0$ (en kortslutning).





Med nollställd strömkälla ($i_s = 0$ ett avbrott) och spänningsdelning

$$v_{ab1} = v_s \frac{R}{3R + R} = \frac{v_s}{4}$$

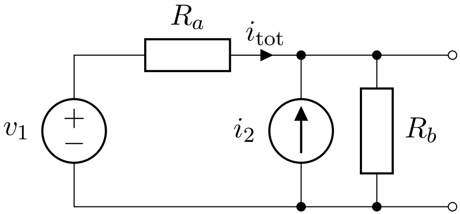
Med nollställd spänningskälla ($v_s = 0$ en kortslutning) och parallellkoppling

$$v_{ab2} = i_s \frac{3R \cdot R}{3R + R} = i_s \frac{3R}{4}$$

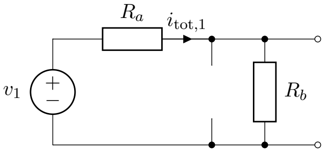
Totalt $v_{ab} = v_{ab1} + v_{ab2} = \frac{v_s}{4} + i_s \frac{3R}{4}$ jämför med lösningen med nodanalys ovan.

Superposition: ex2

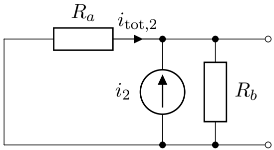
Beräkna strömmen i_{tot} i kretsen nedan.



Bryt upp kretsen i två och beräkna $i_{\text{tot}} = i_{\text{tot},1} + i_{\text{tot},2}$.



$+$



Nollställd ström

$$i_{\text{tot},1} = \frac{v_1}{R_a + R_b}$$

Nollställd spänning

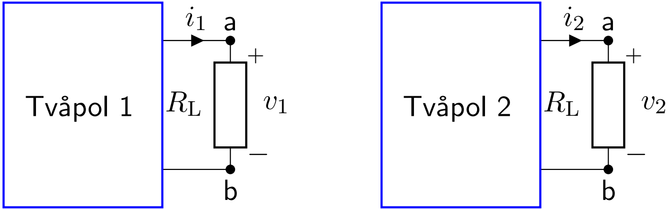
$$i_{\text{tot},2} = -\frac{R_b}{R_a + R_b} i_2$$

Outline

Tvåpolsekvivalenter

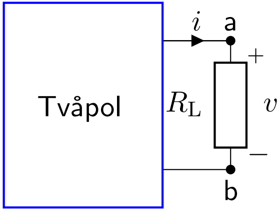
Tvåpol

Krets med två noder där en yttre krets kan kopplas in. Ritas ofta som en låda.



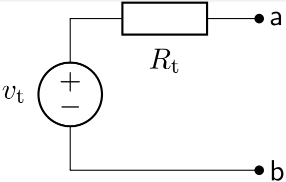
- Ekvivalenta om $i_1 = i_2$ (och därmed $v_1 = v_2$) för alla laster R_L
- Kan också använda en yttre källa. Behövs om tvåpolen är passiv.

Tvåpolsekvivalenter

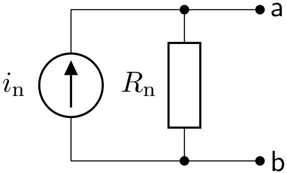


Tvåpoler kan representeras med Thévenin- och Nortonekvivalenter.

Théveninekvivalent



Nortonekvivalent



Hermann von Helmholtz (1821–1894)

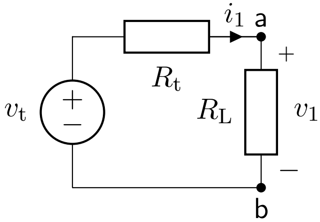
Léon Charles Thévenin (1857–1926)

Edward Lawry Norton (1898–1983)

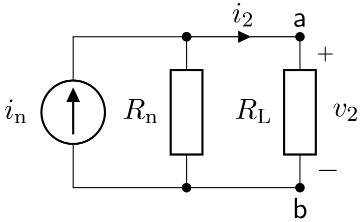
Hans Ferdinand Mayer (1895–1980)

Källtransformation

Théveninekvivalent

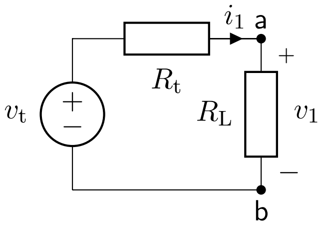


Nortonekvivalent



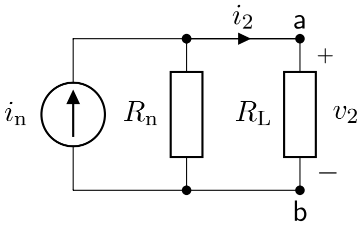
Källtransformation

Théveninekvivalent



$$i_1 = \frac{v_t}{R_t + R_L} \quad \text{(Ohms lag)}$$

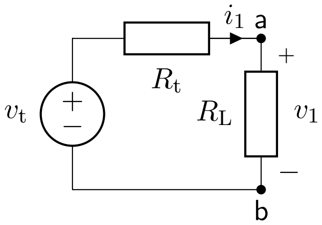
Nortonekvivalent



$$i_2 = \frac{i_n R_n}{R_n + R_L} \quad \text{(strömgrening)}$$

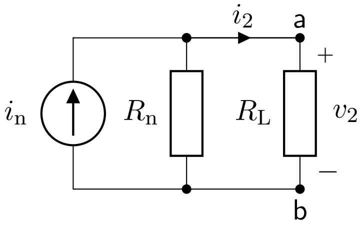
Källtransformation

Théveninekvivalent



$$i_1 = \frac{v_t}{R_t + R_L} \quad \text{(Ohms lag)}$$

Nortonekvivalent



$$i_2 = \frac{i_n R_n}{R_n + R_L} \quad \text{(strömgrening)}$$

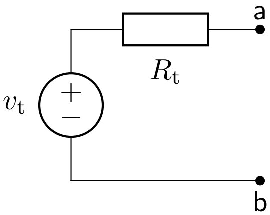
Ekvivalenta ($i_1 = i_2$ för alla R_L) om $R_t = R_n$ och $v_t = i_n R_t$.

Enklast att först betrakta kortslutning $R_L = 0 \Rightarrow v_t = R_t i_n$ och därmed

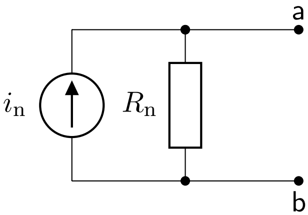
$$\frac{R_t}{R_t + R_L} = \frac{R_n}{R_n + R_L} \Rightarrow R_t(R_n + R_L) = R_n(R_t + R_L) \Rightarrow R_t R_L = R_n R_L \Rightarrow R_t = R_n$$

Källtransformation (enklast)

Théveninekvivalent



Nortonekvivalent

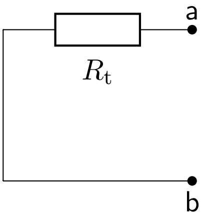


Ekvivalenta om

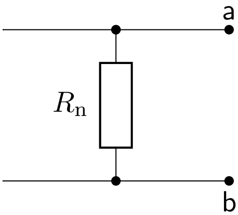
$$R_t = R_n \quad \text{och } v_t = R_n i_n$$

Källtransformation (enklast)

Théveninekvivalent



Nortonekvivalent



Ekvivalenta om

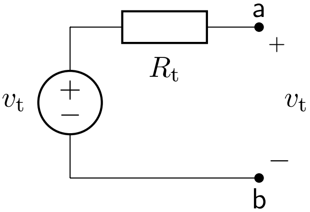
$$R_t = R_n \quad \text{och } v_t = R_n i_n$$

Enklast genom att jämföra

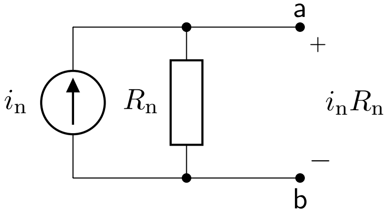
- ingångsresistansen $R_{ab} = R_t = R_n$ med nollställda källor $v_t = 0$ och $i_n = 0$
- tomgångsspänningen $v_{ab} = v_t = i_n R_n = i_n R_t$

Källtransformation (enklast)

Théveninekvivalent



Nortonekvivalent



Ekvivalenta om

$$R_t = R_n \quad \text{och } v_t = R_n i_n$$

Enklast genom att jämföra

- ingångsresistansen $R_{ab} = R_t = R_n$ med nollställda källor $v_t = 0$ och $i_n = 0$
- tomgångsspänningen $v_{ab} = v_t = i_n R_n = i_n R_t$

Sammanfattning

- nya zoom rum för övningar (uppdateras på TimeEdit)
- quiz öppnar snart, kommer att vara öppen en vecka
- videoföreläsningar kommer snart
- spänningsdelning och strömgrening
- nodanalys
- tvåpoler

Nästa föreläsning

- Läs 2.6–2.9, samt kapitel 3.
- Thévenin- och Nortonekvivalenter.
- Effektanpassning.