Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (ETE055)

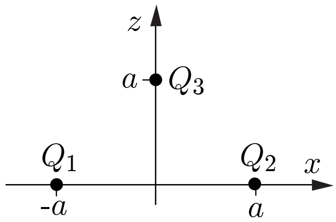
Tid och plats: 29 augusti, 2019, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta:A.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

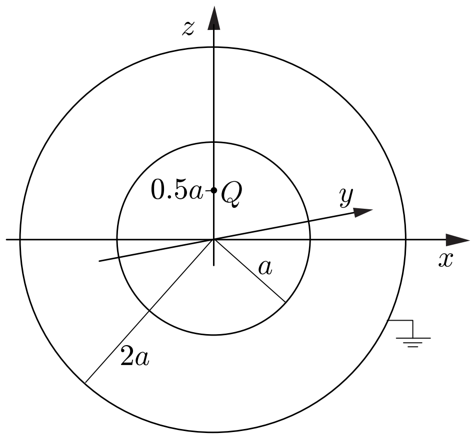
Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

1



Tre punktladdningar Q_1, Q_2 och Q_3 befinner sig i punkterna $\boldsymbol{r}_1 = (-a, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (a, 0, 0)$ och $\boldsymbol{r}_3 = (0, 0, a)$, enligt figur. Bestäm Q_2 och Q_3, uttryckta i Q_1, så att det elektriska fältet är noll i punkten $(0, 0, a/2)$, men skilt från noll i alla andra punkter. Det råder vakuum överallt.

2



En punktladdning Q befinner sig i punkten $(0, 0, a/2)$. Två tunna sfäriska metallskal har centrum i origo, enligt figur. Det inre skalet är oladdat och har radien a, medan det yttre skalet är jordat och har radien $2a$. Det råder vakuum överallt.

a) Bestäm det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(3a, 0, 0)$.

b) Bestäm $\boldsymbol{E}(3a/2, 0, 0)$.

c) Bestäm totala laddningen Q_1 på det jordade yttre skalet.

d) Bestäm potentialen $V(0, 0, 0)$.

e) Bestäm potentialen på det oladdade inre skalet.

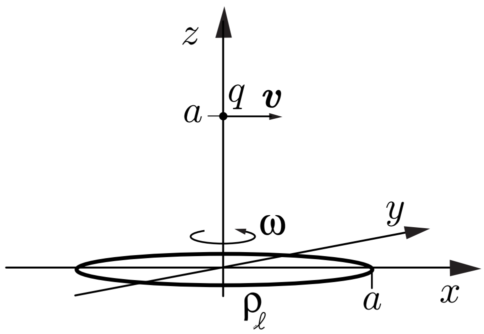
3

En plattkondensator har plattarean A och ett litet avstånd d mellan plattorna. Till att börja med är det luft mellan skivorna ($\varepsilon_r = 1$).

a) Plattkondensatorn laddas upp till potentialen V_0 av en spänningskälla. Därefter kopplas spänningskällan bort. En dielektrisk skiva skjuts nu in mellan plattorna. Skivan har relativa permittiviteten $\varepsilon_r = 2$ och fyller hela utrymmet mellan plattorna. Bestäm spänningen mellan plattorna efter det att skivan skjutits in.

b) När den dielektriska plattan är på plats kopplar man återigen in spänningsaggregatet och laddar upp kondensatorn till spänningen V_0, varpå man kopplar bort spänningskällan. Därefter drar man ut skivan en bit så att exakt halva utrymmet mellan plattorna är fyllt av skivan. Bestäm nu spänningen mellan plattorna.

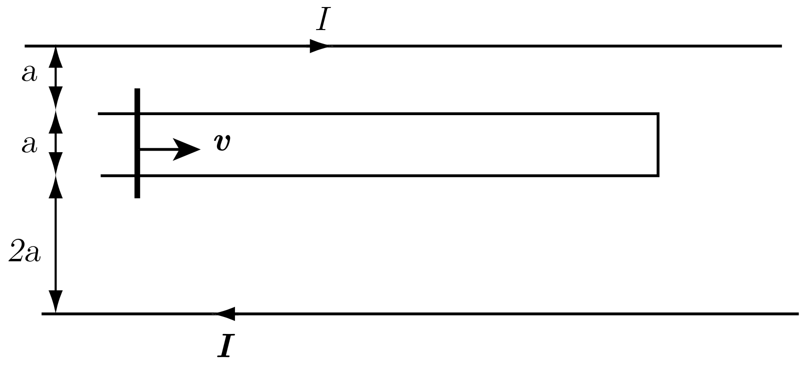
4



En homogent laddad cirkulär metallring med radien a befinner sig i planet $z = 0$ och har sin mittpunkt i origo. Ringen har en konstant linjeladdningstäthet ρ_ℓ och roterar med vinkelfrekvensen ω runt $z-$axeln, enligt figur.

En punktladdning q färdas med konstant hastighet $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$ längs en linje som passerar genom punkten $(0, 0, a)$. När laddningen passerar genom denna punkt är kraften på laddningen $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Bestäm kvoterna F_x/F_z och F_y/F_z uttryckta i v_0, ω, radien a och ljushastigheten i vakuum $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

5



Två långa raka ledare är parallella och för likströmmen I, enligt figur. I samma plan som ledarna finns en U-formad metallskena. Längs metallskenan glider en metallstav med hastigheten $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{z}}$. Den krets som utgörs av skena och metallstav har resistansen R men försumbar självinduktans. Bestäm kraften på metallstaven, till både storlek och riktning, om måtten är de som anges i figuren. Det råder vakuum överallt.

6

En linjärpolariserad våg med det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{\boldsymbol{z}}$ utbreder sig i ett område med vakuum. En mycket tunn cirkulär metallskiva, som kan anses vara perfekt ledande, har placerats i planet $z = 0$. Skivans mittpunkt är i origo.

a) Bestäm magnetfältet $\boldsymbol{H}(0, 0, a, t)$.

b) Bestäm ytladdningstätheten $\rho_{\mathrm{S}}^{+}(t)$ i punkten $(0, 0, 0^{+})$ på ovansidan av skivan och ytladdningstätheten $\rho_{\mathrm{S}}^{-}(t)$ i punkten $(0, 0, 0^{-})$ på undersidan av skivan.

c) Bestäm ytströmtätheten $\boldsymbol{J}_{\mathrm{S}}^{+}(t)$ i punkten $(0, 0, 0^{+})$ på ovansidan av skivan och ytströmtätheten $\boldsymbol{J}_{\mathrm{S}}^{-}(t)$ i punkten $(0, 0, 0^{-})$ på undersidan av skivan.

d) Strömmar och laddningar som varierar i tiden strålar ut elektromagnetiska vågor. Trots att det finns ytladdningstätheter och ytströmtätheter på skivan kommer den dock inte att stråla ut några vågor. Förklara varför.

Ledning till b) och c): Använd randvillkoren för de elektriska och magnetiska fälten. Inuti metallen är dessa fält noll.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 29 augusti, 2019, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta:A.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Av symmetriskäl måste $Q_2 = Q_1$. Då ges elektriska fältet i punkten $(0, 0, a/2)$ av

$$\boldsymbol{E}(0,0,a/2) = \left(\frac{Q_1 a}{4\pi\varepsilon_0((a/2)^2 + a^2)^{1.5}} - \frac{Q_3 a/2}{4\pi\varepsilon_0(a/2)^3}\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

För att få $\boldsymbol{E}(0,0,a/2) = \boldsymbol{0}$ krävs då att

$$Q_3 = Q_1\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Svar: $Q_2 = Q_1$ och $Q_3 = Q_1\dfrac{2}{5\sqrt{5}}$

Lösning problem 2

a) Den yttre sfären har potentialen noll. Entydighet säger då att potentialen är noll för $r \geq 2a$. Därmed: Svar: $\boldsymbol{E}(3a, 0, 0) = \boldsymbol{0}$

b) Det inre skalet har konstant potential. Då är det elektriska fältet radiellt riktat för $a < r \leq 2a$ och dess amplitud beror endast av r. Gauss lag ger

Svar: $\boldsymbol{E}(3a/2, 0, 0) = \dfrac{Q}{9\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{x}}$

c) Eftersom det elektriska fältet är noll för $r > 2a$ måste totala laddningen för $r \leq 2a$ vara noll. Det intre skalet är oladdat och därmed har det yttre skalet laddningen $-Q$. Svar: $-Q$

d) $V(0,0,0)$ får bidrag från punktladdningen och från det yttre skalet. Det ger

$$V(0,0,0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{2a}\right)$$

vilket ger Svar: $V(0,0,0) = \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

e) För $a < r < 2a$ gäller

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Potentialen $V(a)$ på det inre skalet ges av

$$V(a) = V(2a) + \int_a^{2a} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{dr}$$

Eftersom $V(2a) = 0$ fås Svar: $V(a) = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

Lösning problem 3

a) Efter uppladdningen har plattkondensatorn laddningen $Q_1 = C_1 V_0$ där $C_1 = \dfrac{A\varepsilon_0}{d}$. När plattan är på plats har kondensatorn fortfarande laddningen Q_1 men dess spänning ändrats till $V_2 = Q_1/C_2$ där $C_2 = \dfrac{2A\varepsilon_0}{d}$. Det ger Svar: $V_2 = V_0/2$.

b) När plattan är på plats och kondensatorn laddats upp till spänningen V_0 är laddningen $Q_3 = C_2 V_0 = \dfrac{2A\varepsilon_0 V_0}{d}$. När spänningsaggregatet kopplats bort och skivan dragits ut till hälften är kondensatorns laddning fortfarande Q_3 medan dess spänning är $V_3 = Q_3/C_3$. Kapacitansen C_3 är

$$C_3 = \frac{A\varepsilon_0}{2d}(\varepsilon_r + 1) = \frac{3A\varepsilon_0}{2d}$$

Det ger Svar: Spänningen är $V_3 = \dfrac{4V_0}{3}$.

Lösning problem 4

Den roterande linjeladdningen motsvarar en ström $I = \rho_\ell \omega a$. Biot-Savarts lag ger magnetfältet

$$\boldsymbol{B}(0,0,a) = \frac{\mu_0 I}{4\sqrt{2}a}\hat{\boldsymbol{z}}$$

medan Coulombs lag ger det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(0,0,a) = \frac{\rho_\ell}{4\sqrt{2}\varepsilon_0 a}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Laddningen utsätts för Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Det ger

$$F_x = 0 \tag{1}$$
$$F_y = -q\frac{v\mu_0\rho_\ell\omega a}{4\sqrt{2}a} \tag{2}$$
$$F_z = q\frac{\rho_\ell}{4\sqrt{2}\varepsilon_0 a} \tag{3}$$

Svar: $F_x/F_z = 0$ och $F_y/F_z = -\dfrac{v\omega a}{c^2}$, där $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$.

Lösning problem 5

Vi utnyttjar att magnetfältet från en lång rak ledare ges av $\boldsymbol{H} = \frac{I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Flödet genom kretsen med skenan och staven ges då av

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \ell(t)\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_a^{2a}\frac{1}{r_c}dr_c + \int_{2a}^{3a}\frac{1}{r_c}dr_c\right)\\ &= \ell(t)\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 3\end{aligned}$$

där $\ell(t)$ är avståndet från staven till skenans kortslutning. Den inducerade strömmen ges av

$$I_1 = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(t)}{dt} = v\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\ln 3$$

och är riktad medurs. Det är enklast att bestämma kraften genom energikonservering. Den mekaniska effekt som uträttas på staven övergår i värme. Effektkonservering ger

$$Fv = RI_1^2$$

Kraften är motriktad rörelsen.

Svar:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{v}{R}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 3\right)^2 \hat{\boldsymbol{z}}$$

Lösning problem 6

Den mycket tunna skivan kommer inte att påverka planvågen. Anledningen är att planvågen uppfyller rätt randvillkor på ytan av skivan. Randvillkoret är att tangentialkomponenten av det elektriska fältet är noll på ytan. Det är viktigt att skivan är mycket tunn eftersom randvillkoret inte är uppfyllt på kanten. En tunn kant ger ett försumbart bidrag till fältet.

a) Regeln om högersystem ger $\boldsymbol{H}(0,0,a,t) = \eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{E}(0,0,a,t)$, där η_0 är vågimpedansen för vakuum. Därmed fås

$$\boldsymbol{H}(0,0,a,t) = -\frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

b) Ytladdningstätheten i en punkt $\boldsymbol{r}$ på en yta ges av $\rho_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är enhetsnormalvektorn till ytan. På ovansidan är $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$. Det ger

$$\rho_{\mathrm{s}}^{+}(t) = \varepsilon_0 E_0\cos(\omega t)$$

På undersidan är $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Det ger

$$\rho_{\mathrm{s}}^{-}(t) = -\varepsilon_0 E_0\cos(\omega t)$$

c) Ytströmtätheten i en punkt $\boldsymbol{r}$ på en yta ges av $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$, där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är enhetsnormalvektorn till ytan. Det ger

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}^{+}(t) = \frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

och

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}^{-}(t) = -\frac{E_0}{\eta_0}\cos(\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

d) Ytladdningstätheterna på ovan och undersida tar ut varandra vilket gör att totala ytladdningstätheten är noll överallt på skivan. På samma sätt tar ytströmtätheterna på ovan- och undersidan ut varandra. Därmed kan inte skivan stråla ut några vågor.