Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (ETE055)

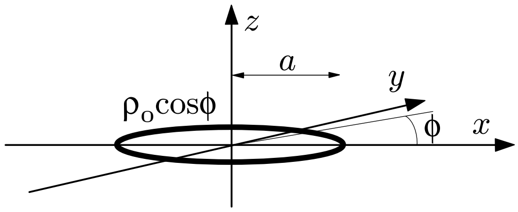
Tid och plats: 30 augusti, 2018, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta C.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

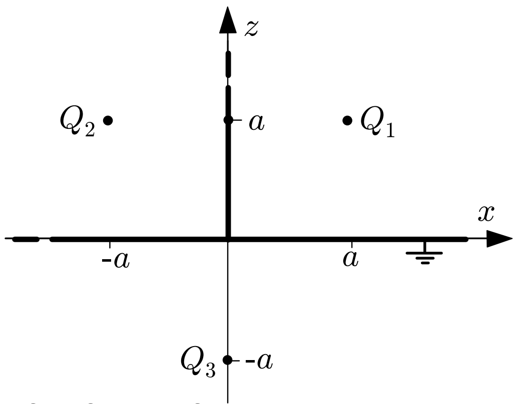
Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

1



En ring med radien a ligger i planet $z = 0$ och har sin mittpunkt i origo. Ringen har linjeladdningen $\rho_\ell(\phi) = \rho_0 \cos\phi$, där ϕ är azimutvinkeln från $x-$axeln. Bestäm det elektriska fältet, $\boldsymbol{E}(0, 0, z)$, på $z-$axeln.

2



Tre punktladdningar Q_1, Q_2 och Q_3 är placerade i punkterna $(a, 0, a)$, $(-a, 0, a)$ och $(0, 0, -a)$. I planet $z = 0$ och halvplanet $x = 0$, $z > 0$ finns tunna metallskivor som är jordade. Bestäm krafterna på de tre laddningarna.

3

En cirkulär plattkondensator har en plan undre platta medan den övre är mycket svagt konisk. Det gör att avståndet mellan plattorna varierar som

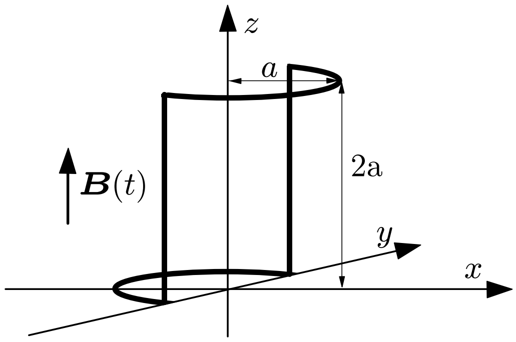
$$d(r_c) = d_0 + \gamma r_c,$$

där γ är en konstant och r_c är radiella avståndet från symmetriaxeln. Plattornas radie är a och det gäller att $a \gg d_0 \gg \gamma a$. Bestäm kondensatorns kapacitans om det är luft mellan plattorna. <u>Ledning</u> $\int \frac{x}{\alpha + x}\,dx = x - \alpha \ln(\alpha + x)$.

4

I halvrymden $z < 0$ är det vakuum och i halvrymden $z \geq 0$ ett dielektrikum med relativ permittivitet $\varepsilon_r > 1$. När en plan våg $\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{x}}$ faller in mot den dielektriska halvrymden blir tidsmedelvärdet av den reflekterade effekten per ytenhet lika stor som tidsmedelvärdet av den transmitterade effekten. Bestäm ε_r.

5



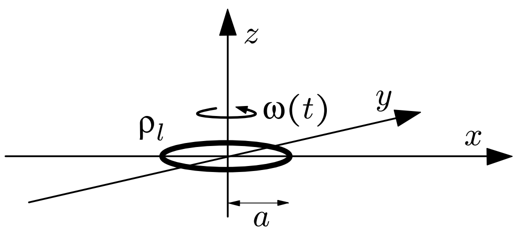
En sluten slinga består av två halvcirkulära ledare med radie a och två vertikala ledare med längd $2a$ som förbinder de båda halvcirklarna med varandra, enligt figur. Halvcirklarna ligger i plan parallella med planet $z = 0$ och de raka ledarna är parallella med $z-$axeln. Slingan har resistansen R, dess självinduktans är försumbar och den befinner sig i ett homogent magnetfält med den tidsberoende flödestätheten

$$\boldsymbol{B}(t) = B_0 \sin \omega t \hat{\boldsymbol{z}}$$

a) Bestäm den inducerade strömmen $i(t)$ i slingan. Markera strömmens referens-riktning i en figur som du ritar.

b) Bestäm det vridande momentet $\boldsymbol{T}(t)$ som slingan utsätts för.

6



En ring med radien a har en linjeladdningstäthet ρ_ℓ. Ringen ligger i planet $z = 0$ med centrum i origo. Ringen är i vila för $t < 0$. Vid $t = 0$ börjar man vrida den med konstant moment i positiv led kring $z-$axeln. Den kommer då att rotera med en vinkelfrekvens som ökar linjärt med tiden, $\omega(t) = \alpha t$, där α är en konstant. I punkten $(20a, 0, 0)$ kommer det för $t > 0$ att finnas ett elektriskt fält $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y, 0)$ där $|E_x| \gg |E_y|$. Bestäm kvoten $\dfrac{|E_y|}{|E_x|}$. Beskriv vilka approximationer du behöver göra för att komma fram till ditt svar

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 30 augusti, 2018, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta C.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

$$\boldsymbol{E}(0,0,0z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{z\hat{\boldsymbol{z}} - a\hat{\boldsymbol{r}}_c}{(z^2+a^2)^{3/2}}\rho_0\cos\phi a\mathrm{d}\phi$$

Eftersom $\hat{\boldsymbol{r}}_c = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ fås

Svar $\boldsymbol{E}(0,0,0z) = -\dfrac{\rho_0 a^2}{4\varepsilon_0(z^2+a^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{x}}$

Lösning problem 2

De tre punktladdningarna är isolerade från varandra av de jordade plattorna. Därmed får vi tre separata speglingsproblem. Q_1 får spegelladdningarna $-Q_1$ i $(a,0,-a)$, Q_1 i $(-a,0,-a)$ och $-Q_1$ i $(-a,0,a)$. Det ger kraften

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}a^2}(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})$$

På samma sätt fås att kraften på Q_2 är

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}a^2}(-\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}})$$

Laddningen Q_3 får en spegelladdning $-Q_3$ i punkten $(0,0,a)$. Det ger kraften

$$\boldsymbol{F}_3 = \frac{Q_3^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Lösning problem 3

Antag att vi lägger en spänning V_0 över kondensatorn. Det elektriska fältet ges då av

$$\boldsymbol{E}(r_c) = \frac{V_0}{d_0+\gamma r_c}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Ytladdningstätheten på den under plattan ges av $\rho_{\mathrm{S}}(r_z) = \varepsilon_0\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}(r_c)$. Totala laddningen på den undre plattan ges av

$$Q = 2\pi\int_0^a \varepsilon_0\frac{V_0}{d_0+\gamma r_c}r_c\mathrm{d}r_c = \frac{2\pi V_0\varepsilon_0}{\gamma}\int_0^a \frac{r_c}{d_0/\gamma + r_c}\,\mathrm{d}r_c$$

Eftersom $C = \dfrac{Q}{V_0}$ fås

Svar $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\gamma}\left(a - \dfrac{d_0}{\gamma}\ln\left(\dfrac{d_0+\gamma a}{d_0}\right)\right)$

(Kontroll: Då $\gamma = 0$ skall man få $C = \dfrac{\varepsilon_0\pi a^2}{d_0}$. Det får man om man använder Maclaurinutveckling, $\ln(1+\epsilon)\approx\epsilon - 0.5\epsilon^2$.

Lösning problem 4

Reflektion och transmissionskoefficenten ges av

$$R = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0}$$
$$T = \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}$$

där vågimpedanserna är $\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ och $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$. Den reflekterade och transmitterade effekten per ytenhet ges av tidsmedelvärdet av strålningsvektorn

$$| < \boldsymbol{S}_R > | = \frac{1}{2\eta_0} R^2 E_0^2$$
$$| < \boldsymbol{S}_T > | = \frac{1}{2\eta_1} T^2 E_0^2$$

Sätts dessa lika med varandra fås andragradsekvationen

$$\eta_1^2 + \eta_0^2 - 6\eta_1\eta_0 = 0$$

med lösningar

$$\eta_1 = (3 \pm \sqrt{8})\eta_0$$

Eftersom $\varepsilon_r > 1$ är det $\eta_1 = (3 - \sqrt{8})\eta_0$ som är den fysikaliskt korrekta lösningen. Det ger

<u>Svar:</u>

$$\varepsilon_r = \frac{1}{(3 - \sqrt{8})^2}$$

(Eftersom $1 = 9 - 8 = (3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8})$ kan detta också skrivas $\varepsilon_r = (3 + \sqrt{8})^2$

Lösning problem 5

a) Det magnetiska flödet genom slingan ges av $\Phi(t) = \pi a^2 B_0 \sin \omega t$. Det ger strömmen

$$i(t) = -\frac{1}{R} \pi a^2 \omega B_0 \cos \omega t$$

som går i positiv led kring $z-$axeln.

b) Det vridande momentet ges av $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}(t)$, där $\boldsymbol{m}$ är slingans magnetiska moment. Ytan som spänns upp av slingan kan ses som en summa av tre ytor: Två halvcirklar och en rektangulär yta. Det magnetiska momentet för halvcirklarna pekar i $z-$led och ger inget bidrag till det vridande momentet. Den rektangulära ytan har ytan $4a^2$, strömmen $i(t)$ och därmed magnetiska momenten

$$\boldsymbol{m} = -4a^2 i(t) \hat{\boldsymbol{x}}$$

det vridande momentet blir

<u>Svar</u>

$$\boldsymbol{T}(t) = -\frac{4\pi a^4}{R} B_0^2 \omega \cos \omega t \sin \omega t \hat{\boldsymbol{y}}$$

Lösning problem 6

Det elektriska fältet består av två delar. Den ena delen är det elektrostatiska fältet från linjeladdningen. Eftersom avståndet till fältpunkten är mycket större än slingans radie approximerar vi slingan med en punktladdning i origo med laddningen $q = 2\pi a\rho_\ell$. Det ger det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}_{\text{stat}}(20a, 0, 0) = \frac{\rho_\ell}{\varepsilon_0 800a}\hat{\boldsymbol{x}}$$

Den andra delen kommer ifrån induktionslagen. När ringen börjar rotera ger den roterande laddningen en ström $i(t) = \rho_\ell a\omega(t)$ längs ringen. Ringen har då det magnetiskt momentet

$$\boldsymbol{m}(t) = \pi a^2 i(t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Detta ger upphov till ett tidsberoende magnetfält, som i sin tur inducerar ett tidsberoende elektriskt fält $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}$. Eftersom det råder axialsymmetri måste det inducerade elektriska fältet vara riktat i $\varphi-$led. Vi kan då använda induktionslagen på integralform

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

där C är cirkeln med centrum i origo och radien $20a$ och $\Phi(t)$ är det magnetiska flödet genom denna cirkel. Det magnetiska flödet fås genom att integrera över en halvsfär. Eftersom magnetiska flödestätheten från en dipol ges av

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0 m(t)}{4\pi r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

fås

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 m(t)}{4\pi(20a)^3} 2\pi \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta(20a)^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$$

det ger

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 m(t)}{40a}$$

Dessutom är $\boldsymbol{E}_{\text{ind}}(20a, 0, 0) = E_{\text{ind}}(20a, 0, 0)\hat{\boldsymbol{y}}$ och

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\text{ind}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 40\pi a E_{\text{ind}}(20a, 0, 0)$$

Det inducerade elektriska fältet ges därmed av

$$\boldsymbol{E}_{\text{ind}}(20a, 0, 0, t) = -\frac{\mu_0 \rho_\ell \alpha a}{1600}\hat{\boldsymbol{y}}$$

Svar: Kvoten ges av

$$\frac{|E_y|}{|E_x|} = \frac{\alpha a^2 \varepsilon_0 \mu_0}{2}$$

Notera att $\varepsilon_0\mu_0 = c^{-2} \approx 1.1 \cdot 10^{-17}$. Det inducerade elektriska fältet är alltså betydligt mindre än det statiska fältet.

En alternativ lösning är att använda relationen $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$, där $\boldsymbol{A}$ är vektorpotentialen från den magnetiska dipolen och V är den elektriska potentialen från laddningarna. Vektorpotentialen ges av $\boldsymbol{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$. Insättning av $\boldsymbol{m}(t) = \pi a^2 i(t)\hat{\boldsymbol{z}}$ och $-\nabla V = \boldsymbol{E}_{\text{stat}}(20a, 0, 0)$ ger samma svar som ovan.