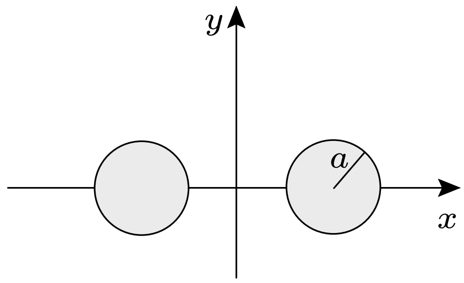
Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (ETE055)

Tid och plats: 19 augusti, 2016, kl. 14.00–19.00, lokal: Vic1A.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89 och 0733-325958.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.



1

Två raka cylindriska områden med radien a är parallella med $z-$axeln. Områdenas symmetriaxlar går genom $(-2a, 0, 0)$ respektive $(2a, 0, 0)$, enligt figuren ovan. Båda områdena har konstant rymdladdningstäthet ρ. Överallt är $\varepsilon_r = 1$.

På linjen $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ är $\boldsymbol{E} = 0$, av symmetriskäl. Det finns ytterligare två linjer där det gäller att $\boldsymbol{E} = 0$. Bestäm dessa linjer.

2

Två raka ledare med radien a är parallella med $z-$axeln. Deras symmetriaxlar går genom $(-2a, 0, 0)$ respektive $(2a, 0, 0)$, enligt figuren ovan. I den vänstra ledaren flyter en ström I i positiv $z-$led och i den högra en lika stor ström i negativ $z-$led. Strömmarna är jämnt fördelade över tvärsnitten. Överallt är $\mu_{\mathrm{r}} = 1$.

Bestäm alla linjer där magnetfältet $\boldsymbol{H}$ är noll.

3

Två raka ledare med radien a är parallella med $z-$axeln. Deras symmetriaxlar går genom $(-2a, 0, 0)$ respektive $(2a, 0, 0)$, enligt figuren ovan. I den vänstra ledaren flyter en ström I i positiv $z-$led och i den högra en lika stor ström i negativ $z-$led. Strömmarna är jämnt fördelade över tvärsnitten. Överallt är $\mu_{\mathrm{r}} = 1$.

En liten plan cirkulär slinga av ledningstråd har radien $b \ll a$ och resistansen R. Slingan rör sig uppåt längs $y-$axeln med konstant hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{y}}$.

a) Hur skall slingan vara orienterad så att den blir så varm som möjligt?

b) Antag att slingan är orienterad enligt **a)**. Åt vilket håll flyter strömmen i slingan då den passerar punkten $(0, 2a, 0)$? Rita en figur där strömriktningen anges med en pil och där koordinataxlarnas riktningar tydligt framgår.

c) Bestäm effektutvecklingen i slingan, orienterad enligt **a)**, som funktion av y.

4

Bestäm arbetet som åtgår att flytta en punktladdning q från $(0, 0, a)$ till $(0, 0, \infty)$ i följande fyra fall:

a) Då det befinner sig en elektrisk punktladdning $-q$ i punkten $(0, 0, -a)$.

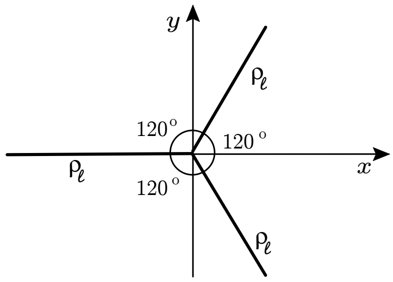
b) Då det befinner sig en statisk elektrisk dipol med momentet $\boldsymbol{p} = (p, 0, 0)$ i punkten $(0, 0, -a)$.

c) Då det befinner sig en statisk elektrisk dipol med momentet $\boldsymbol{p} = (0, 0, p)$ i punkten $(0, 0, -a)$.

d) Då planet $z = 0$ är ett oändligt stort jordat metallplan. Det råder vakuum för $z > 0$.

Kommentar I a, b och c råder vakuum överallt.

5



Tre linjeladdningar med konstant linjeladdningstäthet ρ_ℓ ligger längs tre halvoändliga raka linjer i xy-planet. Linjerna har ena ändan i origo och det är 120 grader mellan linjerna, enligt figur. Överallt är $\varepsilon_r = 1$. Bestäm den elektrisk fältvektorn på $z-$axeln, d.v.s. $\boldsymbol{E}(0, 0, z)$.

6

En vågledare är i princip ett metallrör där elektromagnetiska vågor kan utbreda sig. I partikelacceleratorer används rektangulära vågledare för att överföra mikrovågor. Röret har, som namnet indikerar, ett rektangulärt tvärsnitt.

Antag nu en rektangulär vågledare som är parallellel med $z-$axeln. Dess tvärsnitt upptar området $0 < x < a$, $0 < y < b$. Området begränsas av metallytor som kan antas vara perfekt ledande. Inuti vågledaren råder vakuum.

Vågen som transporteras i vågledaren har en fix frekvens f. Det komplexa elektriska fältet för vågen är

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0 \sin(k_x x)\, e^{\mathrm{i}k_z z} \hat{\boldsymbol{y}} \tag{1}$$

där $k_x = \dfrac{\pi}{a}$. Vågtalet $k = \omega/c$ är relaterat till k_x och k_z via $k^2 = k_x^2 + k_z^2$.

a) Det finns en gränsfrekvens f_c för vågledaren. För frekvenser över f_c är tidsmedelvärdet av effekten som transporteras i vågledaren större än noll, medan den är noll för frekvenser under f_c. Bestäm f_c uttryckt i a och ljushastigheten c.

b) Bestäm tidsmedelvärdet av effekten som transporteras i vågledaren då $f = 2f_c$. Uttryck denna i E_0, a, b, c och μ_0.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 19 augusti, 2016, kl. 14.00–19.00, lokal: Vic1A.
Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Fältet kan endast vara noll på $x-$axeln. På $x-$axeln är fältet från den vänstra cylindern

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0(2a+x)}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för}\, x<-3a\\[2ex] \dfrac{\rho(2a+x)}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för} -3a<x<-a\\[2ex] \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0(2a+x)}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för}\, x>-a.\end{cases}$$

medan fältet från den högra cylindern är

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{h}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0(x-2a)}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för}\, x<a\\[2ex] \dfrac{\rho(x-2a)}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för}\, a<x<3a\\[2ex] \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0(x-2a)}\hat{\boldsymbol{x}}, & \text{för}\, x>3a\end{cases}$$

Det finns därmed tre punkter $(x,y,0)$, där $\boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}(x)+\boldsymbol{E}_{\mathrm{h}}(x)=\mathbf{0}$. Dessa är
$\boldsymbol{r}=(0,0,0)$
$\boldsymbol{r}=(\sqrt{3}a,0,0)$
$\boldsymbol{r}=(-\sqrt{3}a,0,0)$

Lösning problem 2

Fältet kan endast vara noll på $x-$axeln. På $x-$axeln ges magnetfältet från den vänstra cylindern av

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{v}}(x)=\begin{cases}\dfrac{I}{2\pi(2a+x)}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för}\, x<-3a\\[2ex] \dfrac{I(2a+x)}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för} -3a<x<-a\\[2ex] \dfrac{I}{2\pi(2a+x)}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för}\, x>-a\end{cases}$$

För den högra cylindern gäller

$$
\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}(x) = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi(2a-x)}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för } x < a \\[2ex] \dfrac{I(2a-x)}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för } a < x < 3a \\[2ex] \dfrac{I}{2\pi(2a-x)}\hat{\boldsymbol{y}}, & \text{för } x > 3a \end{cases}
$$

Det finns därmed två punkter för $z = 0$ där $\boldsymbol{H}_{\mathrm{v}}(x) + \boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}(x) = \boldsymbol{0}$. Dessa är
$\boldsymbol{r} = (\sqrt{5}a, 0, 0)$
$\boldsymbol{r} = (-\sqrt{5}a, 0, 0)$

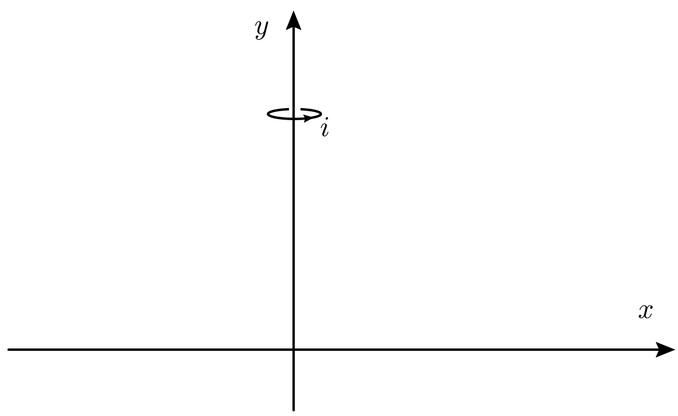
Lösning problem 3

På $y-$axeln är den totala magnetiska flödestätheten

$$
\boldsymbol{B}(0, y, 0) = \mu_0 \frac{I2a}{\pi(y^2 + 4a^2)}\hat{\boldsymbol{y}}
$$

a) För att få maximal uppvärmning måste det magnetiska flödet vara maximalt. Det gör att ringen skall ligga horisontellt, d.v.s. i plan där $y =$konstant.

b) För $y > 0$ är $\boldsymbol{B}(0, y, 0)$ riktad i positiv $y-$led och avtar med ökande y. Lenz lag säger då att den inducerade strömmen i slingan är riktad i positiv led kring $y-$axeln, se figur.



c) Flödet i positiv $y-$led genom slingan är $\Phi(y) = \pi b^2 \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \boldsymbol{B}(0, y, 0)$. Det ger

$$
\Phi(y) = \pi b^2 \mu_0 \frac{I2a}{\pi(y^2 + 4a^2)}
$$

Den inducerade strömmen i slingan är

$$i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

Endast y beror av t i högerledet och det ger

$$i(t) = \frac{I\mu_0 4ab^2 y}{R(y^2+4a^2)^2}v$$

och effektutvecklingen $P(t) = Ri^2(t)$

$$P(t) = \frac{1}{R}\left(\frac{I\mu_0 4ab^2 y}{(y^2+4a^2)^2}v\right)^2$$

Lösning problem 4

a) Energin för ett system med laddningar ges av $W = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} q_n V(\boldsymbol{r}_n)$.

Energin före q har flyttats är $W = -2\frac{1}{2}q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}$. Efter är energin noll. Det ger arbetet

$$A = q\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

b) Kraften på q är riktad i $x-$led då den befinner sig på $z-$axeln. Det ger att det inte åtgår något arbete och $A = 0$.

c) Fältet från dipolen ges på $z-$axeln av

$$\boldsymbol{E}(0,0,z) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 (z+a)^3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Kraften på q är $\boldsymbol{F}(z) = q\boldsymbol{E}(0,0,z)$ och arbetet blir därmed

$$A = -q\int_a^\infty \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 (z+a)^3}$$

det ger

$$A = -\frac{qp}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Att arbetet är negativt betyder att man får energi från systemet.

d) All laddning på metallen har potentialen noll och därmed ingen energi. Enligt speglingsmetoden ges energin hos q av $W = -\frac{1}{2}q\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}$. Det ger arbetet

$$A = q\frac{q}{16\pi\varepsilon_0 a}$$

Lösning problem 5

Det elektriska fältet kan bestämmas genom integration längs de tre linjerna. Det finns dock ett enklare sätt:

Av symmetriskäl är elektriska fältet riktat i positiv $z-$led. Vi får samma fält om vi roterar de tre halvoändliga stavarna 60° runt $z-$axeln. Lägger man ihop de ursprungliga stavarna med tre stavar som är roterade 60° får man tre oändliga stavar. Det elektriska fältet från varje oändlig stav ges på $z-$axeln av

$$\boldsymbol{E}_1(0,0,z) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\varepsilon_0 z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Det ger att det efterfrågade elektriska fältet är

$$\boldsymbol{E}(0,0,z) = \frac{3\rho_\ell}{4\pi\varepsilon_0 z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Lösning problem 6

Tidsmedelvärdet av effekten som transporteras i vågledaren är

$$P = \int_0^a \int_0^b \mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

där $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*$ är den komplexa strålningsvektorn.

Magnetfältet $\boldsymbol{H}$ ges av induktionslagen

$$\boldsymbol{H} = -\mathrm{i}\frac{1}{\omega\mu_0}\nabla \times \boldsymbol{E}$$

Här är

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{i}k_z E_0 \sin(k_x x)e^{\mathrm{i}k_z z}\hat{\boldsymbol{x}} + k_x E_0 \cos(k_x x)e^{\mathrm{i}k_z z}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Det ger

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2\omega\mu_0}|E_0|^2 \left(-\mathrm{i}k_x \sin(k_x x)\cos(k_x x)\hat{\boldsymbol{x}} + k_z \sin^2(k_x x)\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$

Realdelen av $\boldsymbol{S}$ ges av

$$\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} = \frac{1}{2\omega\mu_0}\mathrm{Re}\{k_z\}|E_0|^2 \sin^2(k_x x)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Denna är noll då k_z är imaginär. Eftersom $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$, där $k = 2\pi f/c$ får vi att då $f < \frac{k_x c}{2\pi}$ är $\mathrm{Re}\{\boldsymbol{S}\} = \boldsymbol{0}$ och därmed sker ingen effekttransport.

a) Svar: $f_c = \frac{c}{2a}$

b)

$$P = \frac{1}{2\omega\mu_0}|E_0|^2 k_z \int_0^a \int_0^b \sin^2(k_x x)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

Eftersom $k = \dfrac{4\pi f_c}{c}$ och $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}$ gäller $k_x = \dfrac{\pi}{a}$, $k = \dfrac{2\pi}{a}$ och $k_z = \sqrt{3}\dfrac{\pi}{a}$. Därmed

$$P = \frac{\sqrt{3}ab}{8c\mu_0}|E_0|^2$$