Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (EITF85)

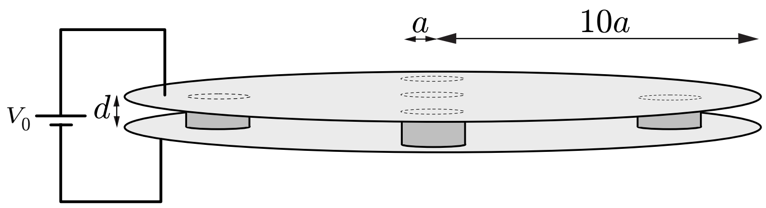
Tid och plats: 31 oktober, 2018, kl. 14.00–19.00, lokal: MA10 A–H.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89 och 0733 325958.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

1



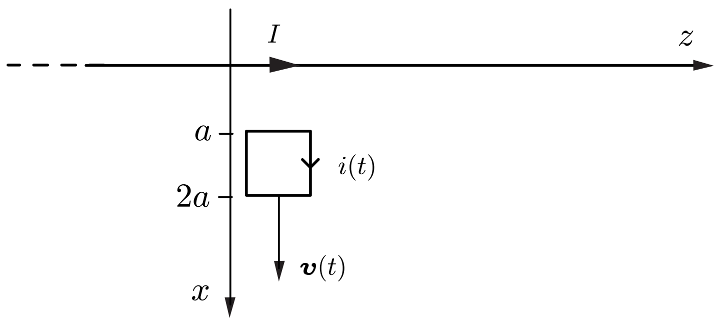
I en cirkulär plattkondensator hålls plattorna åtskilda med 5 cirkulära homogena plastcylindrar med relativa permittiviteten $\varepsilon_r = 4$ och radien a. Kondensatorns plattor har radien $10a$ och avståndet mellan plattorna är d, där $d << 10a$. Det råder vakuum utanför plastcylindrarna. En spänning V_0 ligger över kondensatorn, enligt figur.

a) Bestäm den fria laddningen Q_f på den övre metallplattan.

b) Bestäm kvoterna $\dfrac{|\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{E}_2|}$ och $\dfrac{|\boldsymbol{D}_1|}{|\boldsymbol{D}_2|}$, där $\boldsymbol{E}_1$, och$\boldsymbol{D}_1$ är det elektriska fältet och den elektriska flödestätheten i vakuumdelen medan $\boldsymbol{E}_2$ och $\boldsymbol{D}_2$ är motsvarande storheter i plastcylindrarna.

c) Hur stor bunden ytladdning finns på den övre plana ytan av varje cylinder?

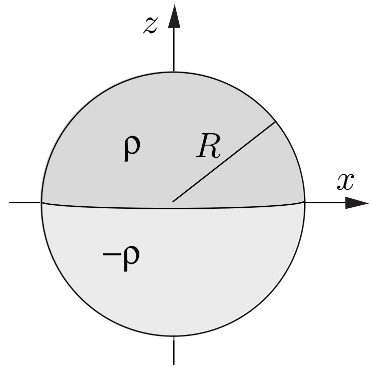
2



En lång rak ledare för likströmmen I. En kvadratisk metallslinga med sidan a och resistansen R är placerad rakt under ledaren med övre sidan på avståndet a från ledaren, enligt figur. Vid $t = 0$ släpps metallslingan som då faller nedåt. Dess hastighet ökar linjärt med tiden enligt $\boldsymbol{v} = gt\hat{\boldsymbol{x}}$, där g är tyngdaccelerationen. Metallslingans ledare antas vara tunn och slingans självinduktans kan försummas.

Bestäm den inducerade strömmen $i(t)$ i metallslingan för $t > 0$.

3

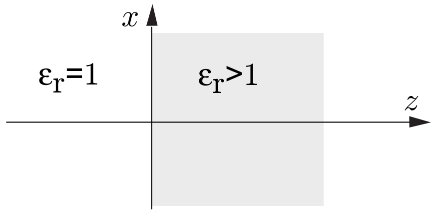


Ett klot med radien R är uppdelat i ett övre och ett undre halvklot. Det övre halvklotet har rymladdningstätheten ρ och det undre rymdladdningstätheten $-\rho$. Överallt är relativa permittivitteten ett och konduktiviteten noll.
a) Bestäm det elektriska fältet i centrum av klotet.
b) Bestäm det elektriska fältet i punkten $(0, 20R, 20R)$.
<u>Ledning:</u> Dipolmomentet för en laddningstäthet $\rho(\boldsymbol{r})$ ges av $\boldsymbol{p} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V$.

4

a) En koaxialkabel består av en tunn cylindrisk innerledare med radie a, och en tunn cylindrisk ytterledare med radie $4a$, se övre figuren. Beräkna koaxialkabels självinduktans per längdenhet, L, genom att först bestämma magnetiska flödet per längdenhet genom en längdsektor av kabeln då en ström I går genom den inre ledaren och en ström $-I$ genom den yttre ledaren. Överallt gäller $\mu_r = 1$.
b) Kontrollera ditt resultat genom att först beräkna den totalt upplagrade magnetiska energin W_m per längdenhet i koaxialkabeln och sedan använda relationen $W_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}LI^2$.
c) Antag att innerledaren fortfarande är tunn och har radien a medan ytterledaren består av ett metallrör med innerradie $4a$ och ytterradie $5a$, se undre figuren. Det flyter en ström I i innerledaren och ström $-I$ i ytterledaren. Strömmen antas vara jämnt fördelad över ytterledarens tvärsnitt. Bestäm magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ överallt.

5



I halvrymden $z < 0$ råder vakuum medan halvrymden $z > 0$ består av ett oledande dielektriskt material med relativ permittivitet $\varepsilon_r > 1$. En planvåg $\boldsymbol{E}_1(z,t) = E_1 \cos(k_1 z - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$ sänds in från vänster och ger upphov till en reflekterad och transmitterad planvåg. Genom att även sända in en lämplig planvåg $\boldsymbol{E}_2(z,t)$ från höger i den dielektriska halvrymden kan den reflekterade planvågen i $z < 0$ släckas ut. Det betyder att för $z < 0$ blir totala fältet $\boldsymbol{E}_1(z,t) = E_1 \cos(k_1 z - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$. Bestäm $\boldsymbol{E}_2(z,t)$.

6

En elektrisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig i origo. Ett elektriskt fält $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$, skapat av yttre källor, finns också i området. Det råder vakuum överallt.
a) Bestäm en radie R, uttryckt i E_0, p och ε_0 för vilket det totala elektriska fältet saknar θ komponent, där θ är polvinkeln i sfäriska koordinater.
b) En perfekt ledande sfär med radien a placeras i ett homogent elektriskt fält $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{z}}$. Bestäm det totala elektriska fältet för $r > a$. Sfärens centrum är placerad i origo och det är vakuum för $r > a$.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 31 oktober, 2018, kl. 14.00–19.00, lokal: MA10 A–H.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Kondensatorn kan ses som två parallellkopplade plattkondensatorer. Den ena med arean $A_1 = \pi 100a^2 - 5\pi a^2 = 95\pi a^2$ och vakuum, och den andra med arean $5\pi a^2$ och fylld med plast. Totala kapacitansen är

$$C = \frac{\varepsilon_0 95\pi a^2}{d} + \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 5\pi a^2}{d}$$

a) Laddningen på den övre plattan är

Svar: $Q_\mathrm{f} = CV_0 = 115\frac{\varepsilon_0\pi a^2}{d}V_0$

b) $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = \frac{V_0}{d}\hat{\boldsymbol{z}}$, $\boldsymbol{D}_1 = \varepsilon_0\boldsymbol{E}_1$ och $\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}_2$, vilket ger

Svar: $\frac{|\boldsymbol{E}_1|}{|\boldsymbol{E}_2|} = 1$ samt $\frac{|\boldsymbol{D}_1|}{|\boldsymbol{D}_2|} = 0.25$.

c) Den totala ytladdningstätheten ges av $\rho_\mathrm{S} = \varepsilon_0\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{E}_2 = \varepsilon_0\frac{V_0}{d}$ och den fria ytladdningstätheten är $\rho_\mathrm{fS} = \hat{\boldsymbol{z}}\cdot\boldsymbol{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{V_0}{d}$. Den bundna ytladdningstätheten $\rho_\mathrm{bS} = \rho_\mathrm{S} - \rho_\mathrm{fS}$

$$\rho_\mathrm{bS} = \varepsilon_0\frac{V_0}{d} - \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{V_0}{d} = (1-\varepsilon_r)\varepsilon_0\frac{V_0}{d}$$

och den bundna ytladdningen

Svar: $Q_b = -\pi a^2 3\varepsilon_0\frac{V_0}{d}$

Lösning problem 2

För $t > 0$ befinner sig den övre sidan vid $x_1(t) = a + \frac{gt^2}{2}$ och den undre vid $x_2(t) = 2a + \frac{gt^2}{2}$. Flödet är

$$\Phi(t) = a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{1}{r_c}\,\mathrm{d}r_c$$

Den inducerade EMK:n kan skrivas

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{dx_2(t)}{dt}\frac{1}{x_2(t)} - \frac{dx_1(t)}{dt}\frac{1}{x_1(t)}\right)$$

Det ger den inducerade strömmen $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}$ till

$$i(t) = \frac{a\mu_0 Igt}{\pi R}\left(\frac{1}{2a+gt^2} - \frac{1}{4a+gt^2}\right) \tag{1}$$

Lösning problem 3

a) Båda halvkloten ger samma bidrag till det elektriska fältet. Vi bestämmer bidraet för den övre och multiplicerar med 2.

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -2\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \frac{\hat{\boldsymbol{r}}'}{r'^2}r'^2\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

där $\hat{\boldsymbol{r}}' = (\sin\theta'\cos\phi, \sin\theta'\sin\phi', \cos\theta')$. Integrationen i $\phi'-$led gör att endast $z-$komponenten är skild från noll. Det ger

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\int_0^R \cos\theta'\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\hat{\boldsymbol{z}}$$

Eftersom $\int_0^{\pi/2}\cos\theta'\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta')\,\mathrm{d}\theta' = \frac{1}{2}$ fås

Svar: $\boldsymbol{E}(0) = -\frac{\rho R}{2\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}$.

b) Vi använder dipolapproximationen. Av symmetriskäl ges dipolmomentet av

$$\boldsymbol{p} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}v = 2\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r'\hat{\boldsymbol{r}}'\,r'^2\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

Det ger

$$\boldsymbol{p} = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}v = 2\rho\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R r'\hat{\boldsymbol{r}}'\,r'^2\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\phi'$$

och

$$\boldsymbol{p} = \frac{\pi\rho R^4}{2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Dipolfältet är

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

I punkten $\boldsymbol{r} = (0, 20R, 20R)$ gäller $r = 20\sqrt{2}R$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ och $\phi = \pi/2$, $\cos\theta = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\hat{\boldsymbol{y}} - \hat{\boldsymbol{z}}}{\sqrt{2}}$. Det ger

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho R}{16(20\sqrt{2})^3\varepsilon_0}(3\hat{\boldsymbol{y}} + \hat{\boldsymbol{z}})$$

Lösning problem 4

a) Flödestätheten mellan ledarna ges av $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$. I övriga områden är den noll.

Det magnetiska flödet genom en längdsektion (längd ℓ) av kabeln blir

$$\Phi = \ell\int_a^b \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}r_c = l\mu_0\int_a^b \frac{\ell}{2\pi r_c}\,\mathrm{d}r_c = \frac{\ell l\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

vilket ger självinduktansen L per längdenhet

$$L = \frac{\Phi}{\ell I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(4)$$

b) Som kontroll kan vi räkna ut den upplagrade magnetiska energin per längdenhet. Den upplagrade energin per längdenhet i koaxialkabeln är (V är volymen i området mellan ledarna på en längd ℓ, $\mathrm{d}v = r_c\,\mathrm{d}r_c\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$)

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2l\mu_0} \iiint_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2l\mu_0} 2\pi l \int_a^b \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_c^2} r_c\,\mathrm{d}r_c = \frac{I^2\mu_0}{4\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r_c}{r_c} = \frac{I^2\mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

vilket vid jämförelse med uttrycket $W_\mathrm{m} = LI^2/2$ ger

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(4)$$

c) Strömtätheten i den yttre ledaren är $\boldsymbol{J}(r_c) = -\dfrac{I}{\pi((5a)^2 - (4a)^2)}\hat{\boldsymbol{z}} = -\dfrac{I}{9\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$. Ampères lag ger

$$\boldsymbol{B} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & 0 < r_c < a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}, & a < r_c < 4a \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\left(1 - \dfrac{1}{9a^2}(r_c^2 - (4a)^2)\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}, & 4a < r_c < 5a \\ \boldsymbol{0}, & r_c > 5a \end{cases}$$

Lösning problem 5

Den infallande vågen som propagerar åt höger ger en reflekterad våg

$$\boldsymbol{E}_1^R(z,t) = E_0 R_1 \cos(k_1 z + \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

där R_1 är reflektionskoefficienten

$$R_1 = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}$$

Den infallande vågen i dielektrikat låter vi vara $\boldsymbol{E}_2(z,t) = E_2 \cos(k_2 z + \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$, där $k_2 = k_1\sqrt{\varepsilon_r}$. Den ger upphov till en transmitterad våg

$$\boldsymbol{E}_2^T(z,t) = E_2 T \cos(k_1 z + \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

där, eftersom vågen faller in från dielektrikat,

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}$$

För att utsläckning skall ske krävs att $\boldsymbol{E}_1^R(z,t) + \boldsymbol{E}_2^T(z,t) = \boldsymbol{0}$ för $z < 0$. Det ger

$$E_2 = -\frac{E_0 R}{T} = E_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_r} - 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}}$$

och

$$\boldsymbol{E}_2(z,t) = E_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_r} - 1}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \cos(k_2 z + \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$$

Lösning problem 6

a) Totala elektriska fältet ges av

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0 \hat{\boldsymbol{z}} + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

Kravet är att $\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$. Eftersom $\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = -\sin\theta$ får vi

$$-E_0 + \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$$

Därmed är radien

$$R = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E_0}\right)^{1/3}$$

b) Vi utnyttjar resultatet från a)-uppgiften. Om vi lägger en dipol med styrkan $\boldsymbol{p} = E_0 4\pi\varepsilon_0 a^3 \hat{\boldsymbol{z}}$ i origo får vi att det totala tangentiella elektriska fältet är noll för $r = a$. Randvillkoret för en perfekt ledande sfär är därmed uppfyllt av det konstanta elektriska fältet plus ett dipolfält med $p = E_0 4\pi\varepsilon_0 a^3$. Det gör att det totala elektriska fältet utanför sfären är

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_0 \hat{\boldsymbol{z}} + \frac{E_0 a^3}{r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta)$$

Notera att det inte finns någon verklig dipol i origo men att den inducerade ytladdningen ger upphov till ett dipolfält.