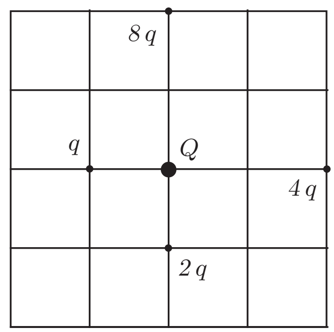
Lösningar tentamen i Elektromagnetisk fältteori för F och Pi, 19 augusti 2015

1



a) Det finns flera möjliga placeringar av laddningarna. En av dessa visas i figuren. Krafterna från de fyra laddningarna ges av Coulombs lag:

Svar:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} =& Q\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}-\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\right)\hat{\boldsymbol{x}}\\ &+Q\left(\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}-\frac{8q}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\right)\hat{\boldsymbol{y}}=\mathbf{0}\end{aligned}$$

b) Potentialen är en summa av de fyra laddningarnas potentialer. **Svar:**

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\frac{4}{2a}+\frac{8}{2a}\right)=\frac{9q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

2

Enklast är att se den vänstra kondensatorn som två parallellkopplade kondensatorer och den högra som två seriekopplade. Formeln för en plattkondensator ger

$$C_1=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}\left(1+\varepsilon_r\right)$$

$$C_2^{-1}=\frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon_r S}\left(1+\varepsilon_r\right)$$

Det ger
Svar:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{\left(1+\varepsilon_r\right)^2}{4\varepsilon_r}$$

3

a) Det är bara den mittersta slingan som ger bidrag, av symmetriskäl. Vi använder att $\boldsymbol{B}$ i centrum av en cirkulär slinga ges av $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\hat{\boldsymbol{n}}$, där i vårt fall $\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Flödestätheten är därmed:

Svar:

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I}{2a}\hat{\boldsymbol{z}}$$

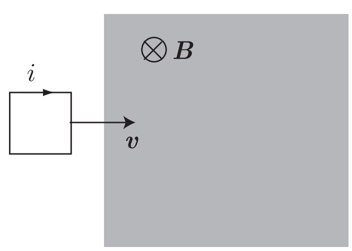
b) Av symmetriskäl ger endast den högra slingan bidrag till flödestätheten. Dess centrum ligger på avståndet $d = \sqrt{(100a)^2 + (3a)^2} \approx 100a$ från fältpunkten $(0, 100a, 0)$. Vi kan anse att $100a \gg a$ och använda dipolapproximationen för att bestämma flödestätheten. Vi kan dessutom placera denna dipol med centrum i origo eftersom avståndet till fältpunkten är stor. Dipolapproximationen ger att en dipol med magnetiska momentet $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$ har magnetiska flödestätheten

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

då dipolen ligger i origo. För den högra slingan gäller i punkten $(0, 100a, 0)$ att $r = 100a$, $\theta = \pi/2$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Dessutom är $m = -I\pi a^2$. Det ger

$$\boldsymbol{B}(0, 20a, 0) = \frac{\mu_0 I a^2}{4(100a)^3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

4



a) Den inducerade emk:n är $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$. Flödet genom slingan är

$$\Phi(t) = \begin{cases} B_0 a v_0 t, \text{ för } 0 < t < a/v_0 \\ B_0 a^2, \text{ för } a/v_0 < t < 2a/v_0 \end{cases}$$

Strömmen genom slingan är $i(t) = \mathcal{E}/R$. Detta ger

Svar:

$$i(t) = \begin{cases} -\dfrac{B_0 a v_0}{R}, \text{ för } 0 < t < a/v_0 \\ 0, \text{ för } a/v_0 < t < 2a/v_0 \end{cases}$$

Strömmens referensriktning ges av figuren.
b) Energin som utvecklas i slingan är

Svar:

$$W = \int_0^{a/v_0} R(i(t))^2 dt = R\left(\frac{B_0 a v_0}{R}\right)^2 \frac{a}{v_0} = \frac{B_0^2 a^3 v_0}{R}$$

5

a) För plana vågor är kvoten mellan amplituderna av de elektriska och magnetiska fälten lika med vågimpedansen, $\dfrac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t)|}{|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0},t)|} = \eta_0$. I vårt fall gäller $\dfrac{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t)|}{|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0},t)|} = \alpha^{-1}$ vilket ger
Svar: $\alpha = \eta_0^{-1} = (120\pi)^{-1}\,\Omega^{-1}$.
b) Vågen är en cirkulärpolariserad planvåg.
c) Vågens utbredningsriktning ges av $\hat{\boldsymbol{k}} = \dfrac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0},t)}{|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0},t)|} = \hat{\boldsymbol{z}}$. Det ger
Svar: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\boldsymbol{x}}E_0\sin(\omega t - kz) + \hat{\boldsymbol{y}}E_0\cos(\omega t - kz)$

6

Strömmen fördelas jämnt över det ledande skiktet. Det ger strömtätheten $\boldsymbol{J} = \dfrac{I}{\pi a^2}\hat{\boldsymbol{x}}$. I det ledande skiktet är, enligt Ohms lag, $\boldsymbol{E}(x) = \sigma(x)^{-1}\boldsymbol{J}$, och den elektriska flödestätheten

$$\boldsymbol{D}(x) = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}(x) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r I}{\sigma(x)\pi a^2}\hat{\boldsymbol{x}}$$

a) Fria volymladdningsfördelningen i det ledande skiktet ges av Gauss lag
$\rho(x) = \nabla\cdot\boldsymbol{D}(x) = \dfrac{dD(x)}{dx}$. Det ger

Svar $\rho(x) = -\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}} I d}{\pi a^2\sigma_0(d+x)^2}$
b) Konduktiviteten i metallplattan kan antas vara oändlig och därmed är den elektriska flödestätheten i metallskivorna noll. Det ger ytladdningstätheten på den undre plattan $\rho_{\mathrm{S,undre}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{D}(0)$ och ytladdningstätheten på den övre $\rho_{\mathrm{S,övre}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{D}(d)$.
Svar Laddningen på den undre respektive övre plattan är då

$$q_{\mathrm{undre}} = \pi a^2\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{D}(0) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r I}{\sigma_0}$$
$$q_{\mathrm{övre}} = -\pi a^2\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{D}(d) = -\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r I}{2\sigma_0}$$

c) Totala laddningen i det ledande skiktet ges av $q_{\text{led}} = \pi a^2 \int\limits_0^d \rho(x)\,\mathrm{d}x = \pi a^2 \int\limits_0^d \frac{dD(x)}{dx}\,\mathrm{d}x = \pi a^2(D(d) - D(0))$.
Svar: $q_{\text{led}} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r I}{2\sigma_0}$