Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för $\pi 3$ (ETEF01) och F3 (ETE055)

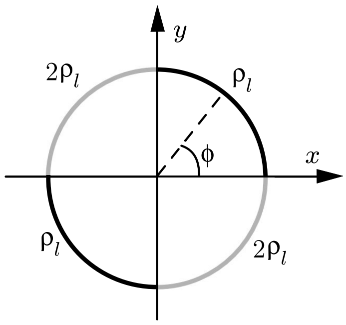
Tid och plats: 3 januari, 2017, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta B för F och E3139 för Pi.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

1

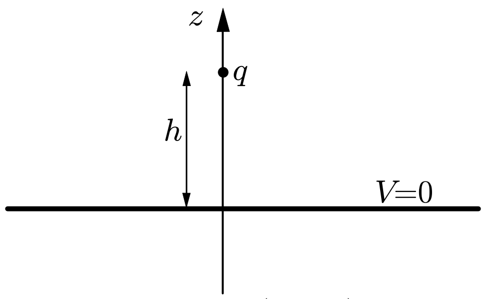


En linjeladdning ligger utefter en cirkel med radien a, enligt figur. Linjeladdningstätheten är ρ_ℓ för $0 < \phi < 90°$ och $180° < \phi < 270°$ och $2\rho_\ell$ för $90 < \phi < 180°$ och $270° < \phi < 360°$. Det råder vakuum utanför linjeladdningen.

a) Bestäm potentialen i origo, d.v.s. $V(0,0,0)$.

b) Bestäm elektriska fältvektorn i origo, d.v.s. $\boldsymbol{E}(0,0,0)$.

2

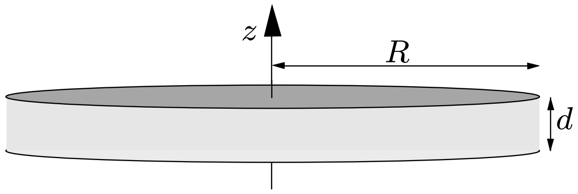


En punktladdning q befinner sig i punkten $(0,0,h)$. I planet $z=0$ finns en stor tunn jordad metallskiva. Det råder vakuum överallt annars.

a) Vad är metallskivans totala laddning.

b) Vad är ytladdningstätheten på metallskivans ovansida i punkten $(0,0,0)$?

3



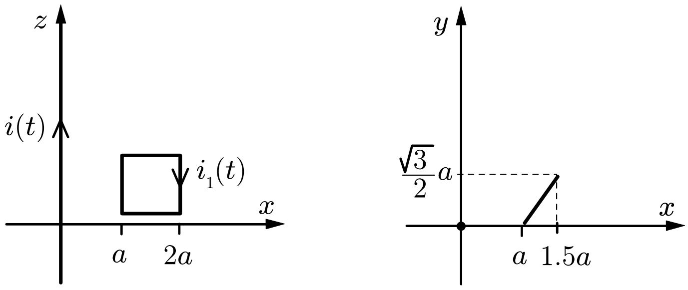
En cirkulär plattkondensator har radien R och avståndet d mellan plattorna, där $d \ll R$. Den undre plattan har sin mittpunkt i origo och den övre i $(0, 0, d)$. Bestäm kondensatorns kapacitans för följande tre fall:

a) Utrymmet mellan plattorna är fyllt med ett oledande dielektrikum med relativ permittivitet ε_{r1} för $0 < z < d/2$ och ett med ε_{r2} för $d/2 < z < d$.

b) Utrymmet mellan plattorna är fyllt med ett oledande dielektrikum med relativ permittivitet ε_{r1} för $0 < r_c < R/\sqrt{2}$ och ett med ε_{r2} för $R/\sqrt{2} < r_c < R$, där r_c är radiella avståndet från symmetriaxeln.

c) Utrymmet mellan plattorna är fyllt med ett oledande dielektrikum med radiellt varierande relativ permittivitet $\varepsilon_r(r_c) = 2 + r_c/R$.

4



En lång rak ledare ligger längs z-axeln och för strömmen $i(t) = I_0 \cos \omega t$, med referensriktning enligt figur.

a) Utanför ledaren finns en kvadratisk slinga med sidan a, resistans R och försumbar självinduktans. Slingan är placerad i $xz-$planet så att en sida är längs $(x, y) = (a, 0)$ och motstående sida längs $(x, y) = (2a, 0)$. Bestäm den inducerade strömmen $i_1(t)$ i slingan. Referensriktningen av i_1 är enligt figuren.

b) Man vrider nu slingan 60° så att den ena sidan fortfarande är vid $(x, y) = (a, 0)$ men motstående sida vid $(x, y) = a\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, som i den högra delen av figuren. Bestäm nu den inducerade strömmen $i_1(t)$ i slingan.

Ledning: Tänk innan du räknar.

5

I halvrymden $z < 0$ råder vakuum medan det i halvrymden $z \geq 0$ finns ett dielektrikum med relativ permittivitet ε_r. En cirkulärpolariserad planvåg

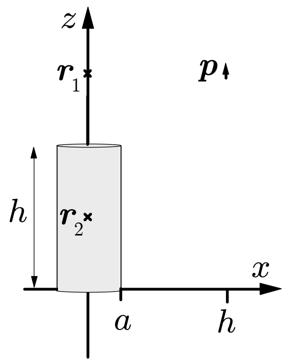
$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0\left(\cos(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}\right)$$

faller in mot den dielektriska halvrymden.

a) Bestäm den infallande vågens effekt per ytenhet $|\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)|$.

b) Bestäm ε_r så att 80% av den infallande vågens effekt transmitteras in i den dielektriska halvrymden. Det finns två lösningar, men du skall välja den med $\varepsilon_r > 1$.

6



Bill och Bull fick följande problem: En oöppnad ölburk kan approximativt antas vara en cylinder med radien a och höjden h. Ölburken placeras så att dess botten är i planet $z = 0$, dess topp är i planet $z = h$ och dess symmetriaxel sammanfaller med $z-$axeln. En elektrisk dipol $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ placeras i punkten $(x, y, z) = (h, 0, 1.5h)$. Du skall beräkna följande integral analytiskt

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_S(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S', \tag{1}$$

där S är ölburkens yta och $\rho_S(\boldsymbol{r}')$ dess ytladdningstäthet. Punkten $\boldsymbol{r}$ kan antingen vara $\boldsymbol{r}_1 = (0,0,1.5h)$ eller $\boldsymbol{r}_2 = (0,0,0.5h)$. Välj en av dessa punkter.

Bill valde punkten $\boldsymbol{r}_1$ och Bull punkten $\boldsymbol{r}_2$. En av dem lämnade in en korrekt lösning efter 10 minuter medan den andre fick ge upp efter en halvtimma, utan att ha kommit någon vart. Vem lämnade in rätt svar och vad är svaret?

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 3 januari, 2017, kl. 14.00–19.00, lokal: Sparta B för F och E3139 för Pi.
Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

a) Alla laddningarna ligger på samma avstånd a från origo. Totala laddningen är $\rho_\ell(\pi a + 2\pi a) = 3\rho_\ell \pi a$. Det ger

Svar: $V(0,0,0) = \dfrac{3\rho_\ell}{4\varepsilon_0}$

b) Svar: $\boldsymbol{E}(0,0,0) = \mathbf{0}$ av symmetriskäl.

Lösning problem 2

a) Svar: Spegling ger att plattans laddning är $-q$.

b) Ytladdningstätheten är $\rho_S = \varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{E}(0,0,0)$. Speglingsmetoden ger att

$$\boldsymbol{E}(0,0,0) = -2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 h^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Svar: $\rho_S(0,0,0) = -\dfrac{q}{2\pi h^2}$

Lösning problem 3

Plattkondensatorformeln är $C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{d}$ för en kondensator med yta A, plattavstånd d och med ett material med relativ permittivitet ε_r mellan plattorna.

a) Här kan vi se kondensatorn som två seriekopplade kondensatorer. Den undre har kapacitansen $C_1 = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\pi R^2}{d}$ och den övre har kapacitansen $C_2 = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\pi R^2}{d}$. Seriekopplingsformeln

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ger totala kapacitansen

Svar: $C = \dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}\pi R^2}{d(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})}$

b) Här kan vi se kondensatorn som två paralllellkopplade kondensatorer med samma areor $\pi R^2/2$. Det ger totala kapacitansen

Svar: $C = \dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2})\pi R^2}{2d}$

c) Kondensatorn kan ses som en parallellkoppling av cirkulära ringar med kapacitanser $\mathrm{d}C = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r(r_c)2\pi r_c}{d}\mathrm{d}r_c$. Parallellkoppling ger integralen

$$C = \frac{\varepsilon_0 2\pi}{d}\int_0^R \varepsilon_r(r_c) r_c \,\mathrm{d}r_c$$

Det ger

Svar: $C = \dfrac{\varepsilon_0 8\pi R^2}{3d}$

Lösning problem 4

Magnetiska flödestätheten är

$$\boldsymbol{B}(r_c, t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

a) Flödet i positiv $y-$led genom slingan är $\Phi(t) = a\int_a^{2a} \boldsymbol{B}(r_c,t)\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\mathrm{d}r_c$. det ger

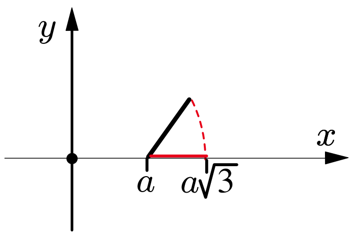
$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi}\ln(2)$$

EMKn är $\mathcal{E}(t) = -\dfrac{\Phi(t)}{dt}$ och därmed

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\mu_0 a I_0 \omega \ln(2)}{2\pi}\sin(\omega t)$$

Svar: $i_1(t) = \dfrac{\mu_0 a I_0 \omega \ln(2)}{2\pi R}\sin(\omega t)$

b)



Vi kan integrera över en enklare yta, enligt figur. Det är inget flöde genom den krökta streckade ytan och därmed är flödet det som passerar genom den röda rektangulära ytan med ena sidan vid $(x, y) = (a, 0)$ och motstående sida vid $(x, y) = (\sqrt{3}a, 0)$. Samma räkningar som i a) ger

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i(t) a}{4\pi}\ln(3)$$

Svar: $i_1(t) = \dfrac{\mu_0 a I_0 \omega \ln(3)}{4\pi R}\sin(\omega t)$

Lösning problem 5

a) Regeln om högersystem ger den infallande vågens magnetfält

$$\boldsymbol{H}(z, t) = \eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}(z, t).$$

Den infallande vågens strålningsvektor är $\boldsymbol{S}(z,t) = \boldsymbol{E}(z,t) \times \boldsymbol{H}(z,t)$ och ges av

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \eta_0^{-1} E_0^2 \left(\cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t)\right) \hat{\boldsymbol{z}}$$

Svar: Den infallande effekten per ytenhet ges av $|\boldsymbol{S}(z,t)| = \eta_0^{-1} E_0^2$

b) Vi måste först bestämma den transmitterade vågens amplitud. Det räcker att göra detta för en linjärpolariserad våg och sedan använda superposition.

Antag en infallande planvåg $\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$. Ansätt en reflekterad och en transmitterad våg:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{\mathrm{rA}}(z,t) &= E_0 R \cos(kz + \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} \\
\boldsymbol{E}_{\mathrm{tA}}(z,t) &= E_0 T \cos(k_2 z - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

där R är reflektionskoefficienten, T är transmissionskoefficienten och $k_2 = k\sqrt{\varepsilon_r}$ är vågtalet i dielektrikumet.

Motsvarande magnetfält ges av

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{A}}(z,t) &= \eta_0^{-1} E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{H}_{\mathrm{rA}}(z,t) &= -\eta_0^{-1} E_0 R \cos(kz + \omega t)\hat{\boldsymbol{y}} \\
\boldsymbol{H}_{\mathrm{tA}}(z,t) &= \eta_1^{-1} E_0 T \cos(k_2 z - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}
\end{aligned}$$

där $\eta_1 = \eta_0/\sqrt{\varepsilon_r}$ är vågimpedansen för dielektrikumet. Randvillkoren ger att $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ är kontinuerliga vid $z = 0$. Det ger

$$\begin{aligned}
&1 + R = T \\
&\eta_0^{-1}(1 - R) = \eta_1^{-1} T
\end{aligned}$$

med lösning

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}} \\
T &= \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}}
\end{aligned}$$

För en infallande våg $\boldsymbol{E}_B(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$ blir R och T desamma som ovan. Den transmitterade vågens strålningsvektor är därmed

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \eta_1^{-1} T^2 E_0^2 \hat{\boldsymbol{z}}$$

Det skall gälla att

$$\eta_1^{-1} T^2 E_0^2 = \frac{4}{5} \eta_0^{-1} E_0^2$$

Det ger ekvationen för ε_r

$$1 + \varepsilon_r - 3\sqrt{\varepsilon_r} = 0$$

Den lösning som uppfyller $\varepsilon_r > 1$ ges av

Svar: $\varepsilon_r = 3.5 + 1.5\sqrt{5}$.

Lösning problem 6

Ölburken är av metall och fungerar som en Faradays bur. Det elektriska fältet är därmed noll inuti ölburken. Superposition ger att det totala elektriska fältet inuti ölburken är en summa av fältet från dipolen och fältet från ytladdningarna. För punkter inuti ölburken gäller alltså

$$\boldsymbol{E}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_{\text{S}}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S' = \boldsymbol{0}$$

Det är denna relation som gör det möjligt för Bull att få rätt svar. Bill har däremot ingen chans. Det går inte att räkna ut integralen för punkter utanför burken utan att veta $\rho_{\text{S}}(\boldsymbol{r})$. Det räcker för Bull att bestämma $\boldsymbol{E}_{\text{dipol}}(\boldsymbol{r})$ för $\boldsymbol{r} = (0, 0, h/2)$. Det elektriska fältet från en dipol $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ som befinner sig i origo ges av

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$$

Genom lite geometriska överläggningar kom Bull fram till att

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{2}h \\
\cos\theta &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sin\theta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\hat{\boldsymbol{r}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}}) \\
\hat{\boldsymbol{\theta}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}})
\end{aligned}$$

Det ger

$$\boldsymbol{E}_{\text{dipol}}(0, 0, h/2) = \frac{p}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 h^3}(3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})$$

Svar: Bull lämnade in rätt svar och svaret är

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\rho_{\text{S}}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}S' = -\frac{p}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 h^3}(3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})$$