

Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för $\pi 3$ (ETEF01) och F3 (ETE055)

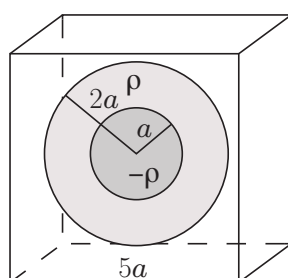
Tid och plats: 4 januari, 2016, kl. 8.00–13.00, lokal: Sparta B.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

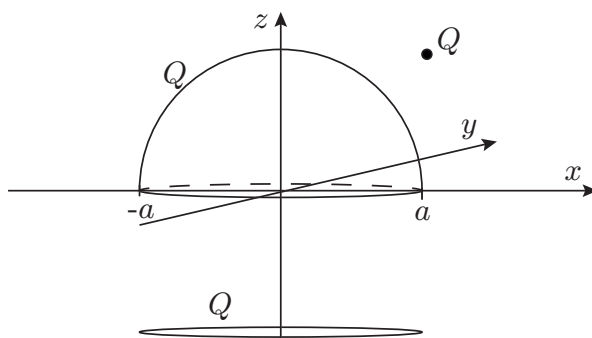
1



En sfär med radien a och konstant rymdladdningstäthet $-\rho$ är omgiven av ett sfäriskt skal med innerradie a , ytterradie $2a$ och konstant rymdladdningstäthet ρ . De är placerade i en kub med tunna metallväggar. Kuben har sidan $5a$ och är oladdad, d.v.s. dess totala laddning är noll. Sfären, skalet och kuben har alla sina centrum i origo. Överallt gäller $\epsilon_r = 1$ och det finns inga laddningar utanför kuben.

- Bestäm totala laddningen på insidan av varje metallvägg.
- Bestäm totala laddningen på utsidan av varje metallvägg.
- Bestäm ett approximativt värde på $\mathbf{E}(100a, 100a, 100a)$.

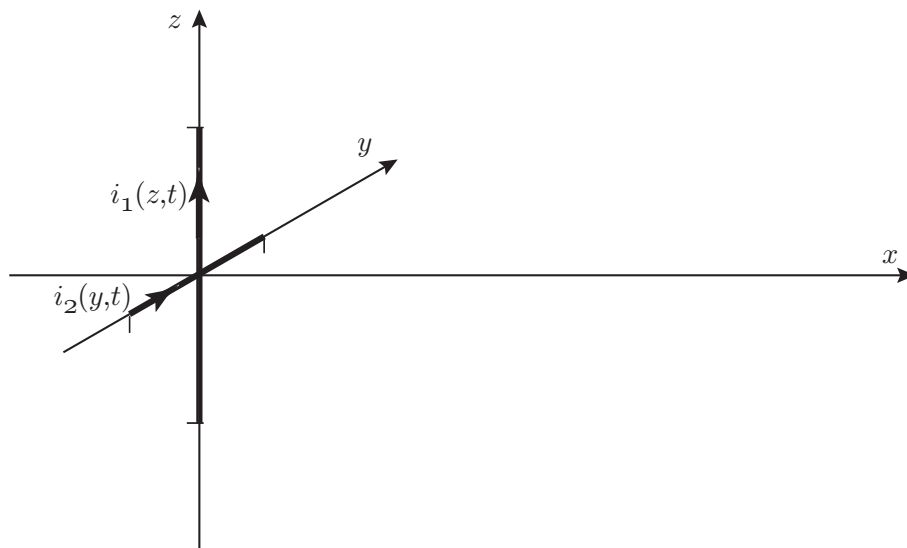
2



Figuren visar en fördelning av följande tre laddningar: Ett tunt halvsfäriskt metallskal med totalladdningen Q . Det är placerat så att sfären har sitt centrum i origo. En horisontell tunn metallring med radien a , centrum i $\mathbf{r} = (0, 0, -a)$ och laddning Q . En punktladdning Q i punkten $(a, 0, a)$.

- Bestäm potentialen i origo.
- Antag att man frågat efter det elektriska fältet i origo. Kan man med formelsamlingens hjälp bestämma fältet? Om du svarar ja så beskriv kortfattat hur man kan gå tillväga och om du svarar nej så beskriv varför man inte klarar av det.

3



För att klara denna uppgift behövs inga kunskaper om antenner. En rak linjär halvvågsantenn med längd L ger på ett mycket stort avstånd från antennen en elektromagnetisk våg som i ett begränsat område kan anses vara en planvåg. Om antennen är riktad i z -led, enligt figur, och har strömmen

$$i_1(z, t) = I_1 \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \cos \omega t, \quad -L/2 < z < L/2$$

ger den på ett stort avstånd på x -axeln det elektriska fältet

$$\mathbf{E}(x, t) = \hat{\mathbf{z}}\alpha I_1 \cos(\omega t - kx),$$

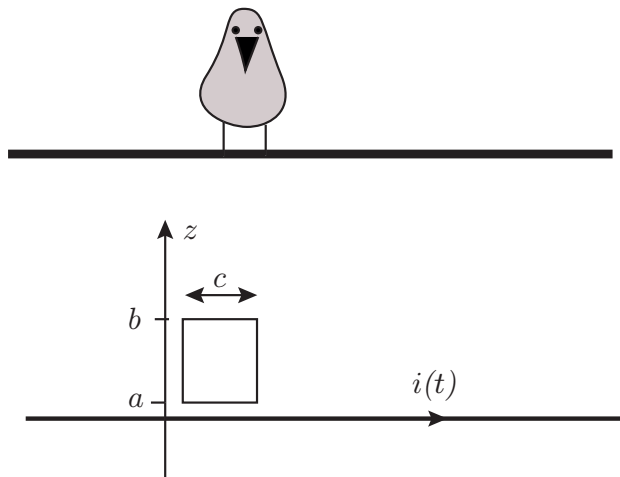
där α är en konstant och $k = \omega/c$ är vågtalet. Ytterligare en halvvågsantenn kopplas in. Den är riktad i y -led, enligt figur, och har strömmen

$$i_2(y, t) = I_2 \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \cos(\omega t + \phi), \quad -L/2 < y < L/2$$

a) Bestäm I_2 , uttryckt i I_1 , och ϕ så att det totala elektriska fältet på x -axeln, på stort avstånd från antennerna, är en linjärpolariserad våg med elektriska fältet riktat parallellt med planet $y = z$.

b) Bestäm I_2 , uttryckt i I_1 , och ϕ så att det elektriska fältet på x -axeln, på stort avstånd från antennerna, är en cirkulärpolariserad våg.

4



Undersök följande två fenomen för en fågel på en kraftledning.

a) En fågel som sitter på en ledning kommer att värmas upp en aning på grund av att magnetfältet inducerar en ström i fågeln. För att bestämma effektutvecklingen i fågeln kan man använda en enkel modell, se figur. Fågeln ersätts av den rektangulära slingan med bredden c och längden $b - a$, enligt figur, där den ena sidan befinner sig på avståndet a från kraftkabelns symmetriaxel och motsatta sidan på avståndet b . Slingans resistans är R . Totala strömmen som går genom kraftledningen ges av $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Bestäm ett uttryck för den tidsberoende inducerade effekten $p(t)$ i fågeln uttryckt i R , I_0 , ω , a , b , c , t och kända naturkonstanter.

b) Fågeln antar samma potential som ledningen och laddas därför upp och ur i takt med strömmen i ledningen. För att ta reda på hur stora strömmar dessa upp- och urladdning ger upphov till i fågelns ben kan vi anta att fågeln är en metallsfär med radien r_0 . Uttryck fågelns laddning $q(t)$ i dess potential $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ och radien r_0 då sfären befinner sig i ett oändligt tomrum där potentialen är noll i oändligheten. Bestäm strömmen $i_f(t)$ som går genom fågelns ben.

Extra: Om du har tid kan du sätta in följande någorlunda realistiska värden (detta ger inga poäng): $\omega = 100\pi$ rad/s, $I_0 = 500$ A, $a = 2$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4$ cm, $R = 100 \Omega$, $r_0 = 2$ cm, $V_0 = 400$ kV.

5

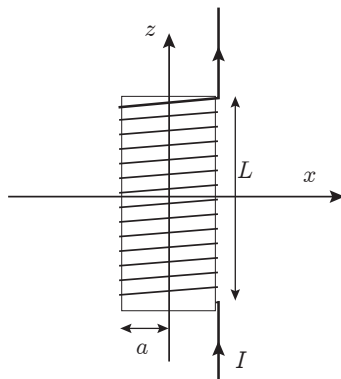
En plattkondensator består av två parallella cirkulära metallplattor med radien a och med ett avstånd d mellan plattorna där $d \ll a$. Kondensatorns symmetriaxel sammanfaller med z -axeln och plattorna ligger i planen $z = d/2$ respektive $z = -d/2$. Det är till att börja med luft mellan plattorna. Kondensatorn laddas upp så att den övre plattan får potentialen $V/2$ och den undre potentialen $-V/2$.

a) Bestäm ett approximativt värde på det elektriska fältet \mathbf{E}_1 mellan plattorna och bestäm den totala fria laddningen q på den övre plattan.

b) Bestäm ett approximativt värde på de tre fältvektorerna $E_x(\mathbf{r})$, $E_y(\mathbf{r})$ och $E_z(\mathbf{r})$ i punkten $\mathbf{r} = (10a, 0, 10a)$.

c) Området mellan kondensatorplattorna fylls med ett dielektriskt oledande material med relativa permittiviteten ϵ_r och kondensatorn laddas upp till spänningen V . Bestäm återigen q , \mathbf{E}_1 och de tre komponenterna av $\mathbf{E}(10a, 0, 10a)$.

6



En rak spole har längden L , radien a och N lindningsvarv, se exemplet i figuren. Ledningarna som matar spolen med ström kan antas vara oändligt långa och vertikala. Spolen är centrerad så att dess mittpunkt ligger i origo. Överallt är $\mu_r = 1$.

En likström I drivs genom spolen. Den magnetiska flödestätheten i origo, $\mathbf{B}(\mathbf{0})$, kan bestämmas med olika grader av approximationer.

a) Bestäm $\mathbf{B}(\mathbf{0})$ genom att anta att spolen är tätlindad med $N \gg 1$, att $L \gg a$ och att magnetiska flödestätheten är konstant inuti spolen och noll utanför. Försumma bidraget från de raka ledarna.

b) Bestäm $\mathbf{B}(\mathbf{0})$ genom att anta att spolen är tätlindad, men utan att anta att $L \gg a$. Spolen kan då antas bestå av N tätt liggande cirkulära slingor där det går en ström I genom vardera slingan. Försumma bidraget från de raka ledarna.

c) Försumma $B_x(\mathbf{0})$ och $B_y(\mathbf{0})$ och bestäm ett exakt uttryck för $B_z(\mathbf{0})$. Hänsyn skall tas till att lindningen är spiralformad och att spolen matas via de två raka ledarna.

Lösningar till tentamen i EF för $\pi 3$ och F3

Tid och plats: 4 januari, 2016, kl. 8.00–13.00, lokal: Sparta B.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Totala laddningen för sfär och skal är

$$Q = \rho \left(\frac{4\pi(2a)^3}{3} - 2\frac{4\pi a^3}{3} \right) = \rho 8\pi a^3$$

a) Det induceras laddningen $-Q$ på insidan av kubens väggar. Varje innervägg får därmed laddningen

$$q_{\text{in}} = -\rho \frac{4\pi a^3}{3}$$

b) Eftersom kuben är oladdad finns en total laddning Q på kubens ytterväggar. Av symmetriskäl fördelas laddningen så att alla yttersidor får lika stor laddning. Totala laddningen per sida blir då

$$q_{\text{ut}} = \rho \frac{4\pi a^3}{3}$$

c) På långt håll ser kuben ut som en punktladdning i origo med laddningen Q . Det ger det elektriska fältet

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(100a, 100a, 100a) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 3\sqrt{3}(100a)^2} (1, 1, 1) = \frac{2\rho a^3}{\epsilon_0 3\sqrt{3}(100a)^2} (1, 1, 1) \\ &= \frac{2\rho a}{\epsilon_0 3\sqrt{3}10^4} (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Lösning problem 2

a) Ytladdningen på halvsfären ligger på avståndet a från origo, linjeladdningen på ringen på avståndet $\sqrt{2}a$ och punktladdningen på avståndet $\sqrt{2}a$.

Det ger

$$V(\mathbf{0}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + 2\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a} = \frac{Q(\sqrt{2} + 1)}{4\pi\epsilon_0 a}$$

b) Man klarar inte av att bestämma det elektriska fältet. Det går inte att på ett enkelt sätt få fram hur ytladdningen på sfären och linjeladdningen på ringen är fördelade. Det gör att integraluttrycken i formelsamlingen för det elektriska fältet är oanvändbara. För att bestämma det elektriska fältet krävs ett numeriskt program, baserat t.ex. på finita elementmetoden, som löser randvärdesproblemet.

Lösning problem 3

a) Välj $I_2 = I_1$ och $\phi = 0$. Då svänger y - och z -komponenterna i takt och är lika stora.

b) Välj $I_2 = I_1$, eller $I_2 = -I_1$, och $\phi = \pi/2$ eller $\phi = -\pi/2$.

Lösning problem 4

a) Magnetiska flödestätheten runt ledningen ges av

$$\mathbf{B}(r_c, \varphi) = \hat{\varphi} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r_c}$$

Det magnetiska flödet ges av

$$\Phi(t) = c \int_a^b \hat{\varphi} \cdot \mathbf{B}(r_c, \varphi) dr_c = c \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi} \ln(b/a)$$

Den inducerade strömmen ges av

$$i_{\text{ind}}(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{c\mu_0 I_0 \omega \ln(b/a)}{2\pi R} \sin(\omega t)$$

Den inducerade effekten är

$$p(t) = R(i_{\text{ind}}(t))^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{c\mu_0 I_0 \omega \ln(b/a)}{2\pi} \right)^2 \sin^2(\omega t)$$

b) En sfär med laddning q har potentialen

$$v(t) = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Det ger $q(t) = 4\pi\epsilon_0 r_0 v(t)$. Strömmen ges av $i_f(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\omega 4\pi\epsilon_0 r_0 V_0 \sin(\omega t)$.

Extra: Insatta värden ger $i_{\text{ind}}(t) \approx 14 \sin(\omega t) \mu\text{A}$ och $p(t) \approx 2 \cdot 10^{-8} \sin^2(\omega t)$ W. Detta är för litet för att värma fågeln. Upp- och urladdningen ger strömmen $i_f(t) \approx -280 \sin(\omega t) \mu\text{A}$, d.v.s. 20 ggr större än den inducerade strömmen.

Lösning problem 5

Kapacitansen för en plattkondensator är $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$ där $S = \pi a^2$ är kondensatorns yta och ϵ_r är relativa permittiviteten i materialet mellan plattorna.

a) Då $\epsilon_r = 1$ är laddningen $q = CV = \frac{\epsilon_0 \pi a^2 V}{d}$ på den övre plattan. Den undre plattan har laddningen $-q$. Det elektriska fältet ges av $\mathbf{E}_1 = -\frac{V}{d} \hat{\mathbf{z}}$

b) Vi använder dipolapproximationen. Dipolmomentet för kondensatorn är $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} p = \hat{\mathbf{z}} q d = \hat{\mathbf{z}} \epsilon_0 \pi a^2 V$. Elektriska fältvektorn ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)$$

I punkten $\mathbf{r} = (10a, 0, 10a)$ gäller $r = \sqrt{2}10a$, $\theta = \pi/4$, $\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. Det ger

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}) &= \frac{3a^2V}{16\sqrt{2}(10a)^3} \\ E_y(\mathbf{r}) &= 0 \\ E_z(\mathbf{r}) &= \frac{a^2V}{16\sqrt{2}(10a)^3} \end{aligned}$$

c) Kapacitansen är nu ε_r gånger större och därmed blir den fria laddningen

$$q = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\pi a^2V}{d}$$

Det elektriska fältet inuti kondensatorn bestäms av V och är därmed oförändrat, d.v.s., $\mathbf{E}_1 = -\frac{V}{d}\hat{\mathbf{z}}$.

För att bestämma $\mathbf{E}(10a, 0, 10a)$ behöver vi veta dipolmomentet. Det ges av $\mathbf{p} = q_{\text{tot}}d\hat{\mathbf{z}}$, där q_{tot} är totala laddningen vid den övre plattan, d.v.s. summan av den fria och bundna laddningen. Den totala yt-laddningen på övre plattan ges av normalkomponenten av det elektriska fältet, $\rho_S = -\varepsilon_0\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{E}_1$. Eftersom \mathbf{E}_1 är detsamma som i a) blir dipolmomentet och därmed $\mathbf{E}(10a, 0, 10a)$ samma som i b).

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}) &= \frac{3a^2V}{16\sqrt{2}(10a)^3} \\ E_y(\mathbf{r}) &= 0 \\ E_z(\mathbf{r}) &= \frac{a^2V}{16\sqrt{2}(10a)^3} \end{aligned}$$

Lösning problem 6

a) Antag ett konstant magnetfält $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{z}}H$ inuti spolen och noll fält utanför. Ampères lag ger $HL = NI$. Därmed gäller

$$\mathbf{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0NI}{L}\hat{\mathbf{z}}$$

b) Biot-Savarts lag ger $\Delta\mathbf{B}(0, 0, 0)$ från en cirkulär slinga med ström ΔI och mittpunkt i z . Formeln finns i formelsamlingen

$$\Delta\mathbf{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0\Delta I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}}$$

En del dz av spolen för strömmen $dI = I\frac{N}{L}dz$. Det ger följande uttryck för $\mathbf{B}(0, 0, 0)$

$$\mathbf{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0NIa^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz \hat{\mathbf{z}}$$

Integralen finns i formelsamlingen. Resultatet blir

$$\mathbf{B}(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{(L/2)^2 + a^2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Vi ser att vi får resultatet i a) om $L \gg a$.

c) Av symmetriskäl bildar \mathbf{B} från de raka ledarna cirklar i xy -planet. De raka ledarna ger därför inget bidrag till B_z (fås även enkelt från Bio-Savarts lag). Använd Biot-Savarts lag för att bestämma $B_z(0, 0, 0)$. Parameterframställningen av kurvan är $\mathbf{r}(\varphi) = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, -L/2 + L\varphi/(2N\pi))$, $0 \leq \varphi \leq 2N\pi$. Det ger

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} &= \frac{d\mathbf{r}(\varphi)}{d\varphi} d\varphi = \left(-a \sin \varphi, a \cos \varphi, \frac{L}{2N\pi} \right) d\varphi \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}' &= -\mathbf{r}' = (-a \cos \varphi', -a \sin \varphi', L/2 - L\varphi'/(2N\pi)) \\ |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= \sqrt{a^2 + (L/2 - L\varphi'/(2N\pi))^2} \end{aligned}$$

Vi får

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = a^2 d\varphi$$

Biot-Svart ger nu

$$B_z(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_0^{2N\pi} \frac{1}{(a^2 + (L/2 - L\varphi/(2N\pi))^2)^{3/2}} d\varphi$$

Variabelsubstitutionen $z = L/2 - L\varphi/(2N\pi)$, $d\varphi = -\frac{2N\pi}{L} dz$ ger

$$B_z(0, 0, 0) = \frac{\mu_0 N I a^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{a^2 + (L/2)^2}}$$

Vi ser att detta är exakt samma uttryck som i b). Skillnaden mellan b) och c) visar sig om vi även bestämmer B_x och B_y .