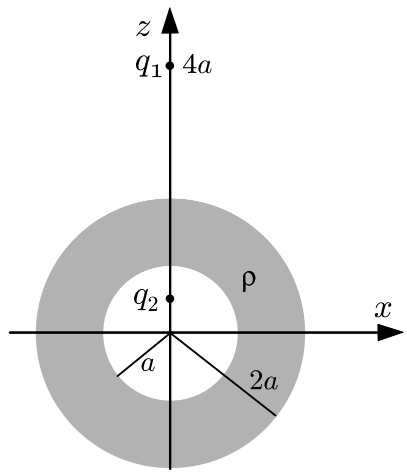
Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (EITF85)

Tid och plats: 27 april, 2019, kl. 08.00–13.00, lokal: Sparta:A.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 0733 325958.

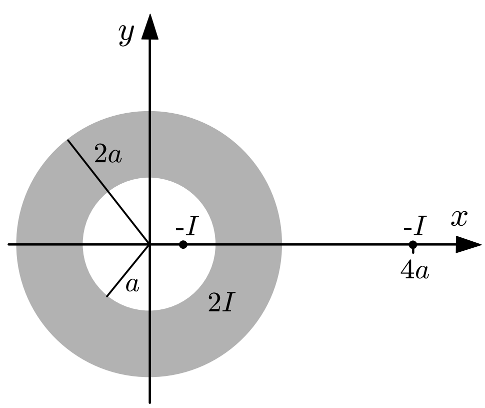
Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

1



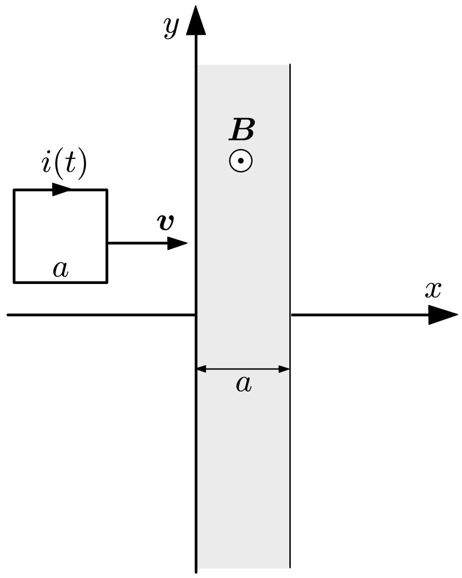
Ett sfäriskt skal upptar området $a \leq r \leq 2a$. Skalet är fyllt med en homogen laddningstäthet ρ. En punktladdning $q_1 = Q$ befinner sig i punkten $(0, 0, 4a)$ och en punktladdning $q_2 = -Q$ befinner sig i punkten $(0, 0, a/2)$. Överallt är $\varepsilon_r = 1$. Bestäm kraften $\boldsymbol{F}_1$ på punktladdningen q_1 och kraften $\boldsymbol{F}_2$ på punktladdningen q_2.

2



Ett cylindriskt metallrör har $z-$axeln som symmetriaxel. Rörets innerradie är a och dess ytterradie $2a$. I röret flyter en likström $2I$ i positiv $z-$led. Hälften av strömmen leds tillbaka genom en mycket tunn ledare som går längs linjen $(x, y) = (4a, 0)$ och den andra hälften genom en annan tunn ledare som går längs linjen $(x, y) = (a/2, 0)$. Strömmen genom röret kan antas vara jämnt fördelat över tvärsnittet. Överallt är $\mu_r = 1$. Bestäm den magnetiska kraft $\boldsymbol{F}$ per längdenhet som verkar på röret.

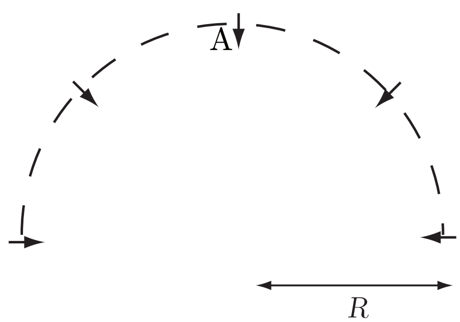
3



En kvadratiskt formad plan metallslinga har sidan a och resistansen R. Slingan befinner sig i $xy-$planet, enligt figur, och dras med konstant hastighet $\boldsymbol{v} = v_0\hat{\boldsymbol{x}}$. Vid tiden $t = 0$ kommer slingan in i ett konstant magnetfält $\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$ som befinner sig i området $0 \leq x \leq a$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Bestäm strömmen $i(t)$ som induceras i slingan som funktion av tiden för alla tider. Strömmens referensriktnings skall vara enligt figuren.

4



Fem elektrostatiska punktdipoler är placerade ekvidistant längs pereferin av en halvcirkel med radien R, enligt figur. Dipolerna är riktade så att deras moment pekar mot cirkelns centrum. Dipolmomentens absolutbelopp är p och överallt är $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$.

a) Bestäm potentialen i cirkelns centrum.

b) Bestäm det elektriska fältet i cirkelns centrum.

c) Bestäm det vridande momentet på dipolen markerad med A.

5

En linjärpolariserad tidsharmonisk planvåg som utbreder sig i positiv $z-$riktning i vakuum har följande elektriska fält

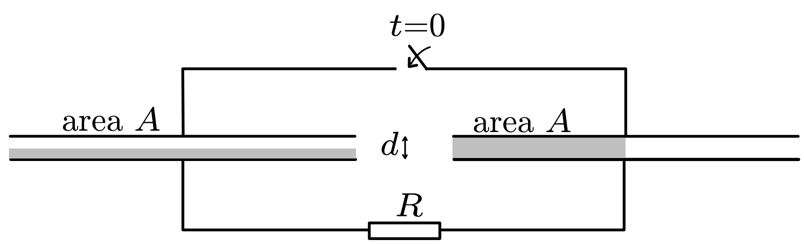
$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}}.$$

a) Bestäm motsvarande strålningsvektor $\boldsymbol{S}(z,t)$.

b) Man vill skapa en planvåg vars strålningsvektor $\boldsymbol{S}(z,t)$ är oberoende av z och t. Man kan göra detta genom att till $\boldsymbol{E}(z,t)$ addera en linjärpolariserad våg $\boldsymbol{E}_1(z,t)$. Bestäm $\boldsymbol{E}_1(z,t)$.

Kommentar: Det finns två lösningar till problemet men det räcker att du anger en av dem.

6



Två plattkondensatorer ligger enligt figur. Båda har arean A och avståndet d mellan plattorna, där $d \ll \sqrt{A}$. I den vänstra kondensatorn är halva utrymmet mellan plattorna fyllt med en horisontell skiva med tjocklek $d/2$, area A och relativ permittivitet ε_r. I den högra kondensatorn är halva utrymmet fyllt med en skiva med tjocklek d, area $A/2$ och relativ permittivitet ε_r. I övriga områden är $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$. För $t < 0$ är den vänstra kondensatorn uppladdad till spänningen V_0 medan den högra är oladdad. Vid tiden $t = 0$ sluts kontakten så att ström kan flyta mellan kondensatorerna. Strömmen går dock genom ett motstånd med resistansen R, enligt figur. Inga yttre källor är inkopplade till kondensatorerna.

När kontakten sluts blir det ett transient förlopp som snabbt avklingar. Efter det råder jämvikt och det flyter ingen ström mellan kondensatorerna. Hur mycket värmeenergi har utvecklats i resistansen från $t = 0$ fram till dess att jämvikt råder?

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 27 april, 2019, kl. 08.00–13.00, lokal: Sparta:A.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Skalets totala laddning är

$$Q_{\text{skal}} = \frac{28\pi a^3}{3}\rho.$$

Kraften på laddningen q_1 får bidrag från q_2 och från skalet. Skalets bidrag är detsamma som från en punktladdning Q_{skal} i origo. Det ger

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7\pi a}{48}\rho - \frac{Q}{49a^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Kraften på laddningen q_2 får endast bidrag från q_1

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{Q^2}{49\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Svar:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7\pi a}{48}\rho - \frac{Q}{49a^2}\right)\hat{\boldsymbol{z}}\\
\boldsymbol{F}_2 &= \frac{Q^2}{49\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{z}}.
\end{aligned}$$

Lösning problem 2

Den inre tunna ledningen får ingen kraft från strömmen i röret. Därmed får röret ingen kraft från den inre ledaren. Kraften på den yttre ledaren får följande bidrag från strömmen i röret:

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{x}},$$

där vi utnyttjat att röret ger $\boldsymbol{B}(r_c,\phi) = \dfrac{\mu_0 2I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ för $r_c > 2a$.

Newtons tredje lag ger att kraften på röret är $-\boldsymbol{F}_1$.

Svar: $\boldsymbol{F}_{\text{rör}} = -\dfrac{\mu_0 I^2}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}$

Lösning problem 3

Strömmen, med referensriktning enligt figuren i uppgiften, ges av

$$i(t) = \frac{1}{R}\frac{d\Phi(i)}{dt},$$

där $\Phi(t)$ är magnetiska flödet i positiv $z-$led genom slingan. Flödet ges av

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ B_0 a v_0 t, & 0 \leq t \leq \dfrac{a}{v_0} \\ B_0 a \left(2a - v_0 t\right), & \dfrac{a}{v_0} < t \leq \dfrac{2a}{v_0} \\ 0, & t > \dfrac{2a}{v_0}. \end{cases}$$

Svar:

$$i(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{B_0 a v_0}{R}, & 0 \leq t \leq \dfrac{a}{v_0} \\ -\dfrac{B_0 a v_0}{R}, & \dfrac{a}{v_0} < t \leq \dfrac{2a}{v_0} \\ 0, & t > \dfrac{2a}{v_0} \end{cases}$$

Lösning problem 4

a) I origo ger samtliga dipoler ger lika stora bidrag till potentialen. Därmed gäller:

Svar

$$V(\mathbf{0}) = 5\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

b) Det elektriska fältet är i origo riktat radiellt ut från varje dipol med styrkan

$$|\boldsymbol{E}(\mathbf{0})| = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Det totala elektriska fältet är

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\left(-\hat{\boldsymbol{z}} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}}) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}}) + \hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}\right)$$

Svar:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{p}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\sqrt{2} + 1\right)\hat{\boldsymbol{z}}$$

c) Av symmetriskäl är vridmomentet noll.

Svar: Vridande momentet$= \mathbf{0}$.

Lösning problem 5

a) Magnetfältet ges av högertrebensregeln:

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \frac{1}{\eta_0} E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}.$$

Strålningvektorn ges därmed av

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \boldsymbol{E}(z,t) \times \boldsymbol{H}(z,t) = \frac{1}{\eta_0} E_0^2 \sin^2(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{z}}.$$

b) Vi lägger till vågen $\boldsymbol{E}_1(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t + \alpha)\hat{\boldsymbol{n}}$ och försöker bestämma fasvinkeln α och riktningen $\hat{\boldsymbol{n}}$ så att $\boldsymbol{S}(z,t)$ blir oberoende av z och t. Riktningen bör väljas vinkelrät mot $\boldsymbol{E}$ d.v.s. $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{y}}$. Magnetfältet ges då av

$$\boldsymbol{H}_1(z,t) = -\frac{1}{\eta_0} E_0 \sin(kz - \omega t + \alpha)\hat{\boldsymbol{x}}.$$

Den totala strålningsvektorn blir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(z,t) &= (\boldsymbol{E}(z,t) + \boldsymbol{E}_1(z,t)) \times (\boldsymbol{H}(z,t) + \boldsymbol{H}_1(z,t)) \\ &= \frac{1}{\eta_0} E_0^2 \left(\sin^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t + \alpha)\right)\hat{\boldsymbol{z}}.\end{aligned}$$

Genom att välja $\alpha = \pm\pi/2$ fås

$$\boldsymbol{S}(z,t) = \frac{1}{\eta_0} E_0^2 \hat{\boldsymbol{z}}.$$

<u>Svar:</u> $\boldsymbol{E}_1(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t \pm \pi/2)\hat{\boldsymbol{y}}$

Kommentar: Den våg vi skapat är en cirkulärpolariserad våg.

Lösning problem 6

Vi använder serie- och parallellkoppling av kondensatorer för att få fram kapacitanserna för den vänstra och högra kondensatorn. Den vänstra kondensatorn har kapacitansen

$$C_1 = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \frac{2\varepsilon_0 A}{d}.$$

Den högra kondensatorn har kapacitansen

$$C_2 = (\varepsilon_r + 1)\frac{\varepsilon_0 A}{2d}.$$

Vi kan, för enkelhets skull, anta att den övre plattan i den vänstra kondensatorn har potentialen $V_0/2$ och den undre potentialen $-V_0/2$ för $t < 0$. Den upplagrade energin i systemet är, för $t < 0$

$$W_{\text{före}} = \frac{1}{2} V_0^2 C_1.$$

För $t < 0$ har den vänstra kondensatorn laddningen $Q = V_0 C_1$ på den övre plattan och $-Q$ på den under medan den högra kondensatorn inte har någon laddning. Efter lång tid råder jämvikt. Då skall det totalt sett finnas laddningen Q på de övre plattorna och $-Q$ på de undre. Eftersom det inte flyter någon ström genom motståndet kan man betrakta de två kondensatorerna som parallellkopplade med totala kapacitansen

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_r^2 + 6\varepsilon_r + 1}{(\varepsilon_r + 1)} \frac{\varepsilon_0 A}{2d}.$$

Den totalt upplagrade energin ges av

$$W_{\text{efter}} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{4V_0^2\varepsilon_r^2}{(\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r^2 + 6\varepsilon_r + 1)} \frac{\varepsilon_0 A}{d}.$$

Värmeenergin som utvecklats i motståndet är

$$W_{\text{värme}} = W_{\text{före}} - W_{\text{efter}} = \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} - \frac{4\varepsilon_r^2}{(\varepsilon_r + 1)(\varepsilon_r^2 + 6\varepsilon_r + 1)} \right) \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{d}.$$

vilket kan förenklas till

Svar:

$$W_{\text{värme}} = W_{\text{före}} - W_{\text{efter}} = \frac{\varepsilon_r(\varepsilon_r + 1)}{\varepsilon_r^2 + 6\varepsilon_r + 1} \frac{\varepsilon_0 A V_0^2}{d}.$$