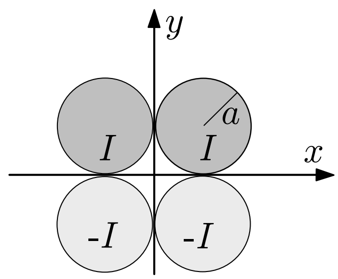
Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (EITF85)

Tid och plats: 12 april, 2018, kl. 08.00–13.00, lokal: Sparta:C.

Kursansvarig lärare: Johan Lundgren, tel.076-2695727.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

1



Fyra ledare har cirkulärt tvärsnitt med radien a. Deras symmetriaxlar är parallella med $z-$axeln och går igenom $(a, a, 0)$, $(-a, a, 0)$, $(a, -a, 0)$ respektive $(-a, -a, 0)$. De två övre ledarna för vardera en likström I i positiv $z-$led medan de två undre för vardera strömmen I i negativ $z-$led. Strömmarna är jämnt fördelade över tvärsnitten och överallt är $\mu_r = 1$.

a) Bestäm $\boldsymbol{B}(0, 0, 0)$.

b) Bestäm $\boldsymbol{B}(a, a, 0)$.

2

En statisk elektrisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{z}}$ befinner sig i origo. En punktladdning q befinner sig i punkten $(a, 0, a)$.

a) Bestäm kraften på punktladdningen och dipolen till både storlek och riktning.

b) Krafterna på punktladdningen och dipolen ger ett vridande moment på systemet. Eftersom systemet är slutet, utan yttre krafter, skall dock det totala vridande momentet vara noll. Förklara denna skenbara motsägelse och visa explicit att totala vridmomentet på systemet är noll.

3

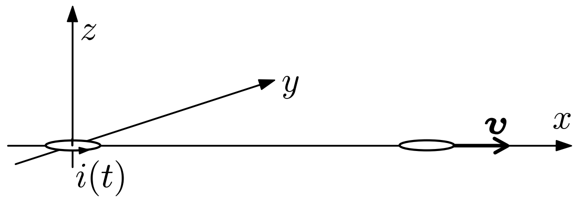
Bestäm det matematiska uttrycket för det elektriska fältet, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, för de plana elektromagnetiska vågor som beskrivs nedan. Amplituden på vågen kan sättas till E_0, vågtalet till k och perioden är T.

a) En tidsharmonisk linjärpolariserad våg propagerar i positiv $z-$led. I origo är dess magnetfält noll vid $t = 0$ och riktat i negativ $y-$led vid $t = T/4$.

b) En tidsharmonisk cirkulärpolariserad våg propagerar i positiv $z-$led. I origo är dess magnetfält riktat i positiv $x-$led vid $t = 0$ och i positiv $y-$led vid $t = T/4$.

c) En tidsharmonisk linjärpolariserad våg propagerar i riktningen $\hat{\boldsymbol{k}} = (1, 0, 1)/\sqrt{2}$. I origo är dess magnetfält noll vid $t = 0$ och riktat i negativ $y-$led vid $t = T/4$.

4



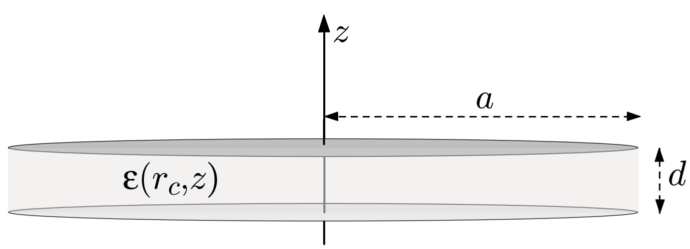
Två små cirkulära slingor med radien a har sina plan i planet $z = 0$. Den ena slingan är fix med mittpunkt i origo och i slingan flyter strömmen $i(t) = I_0 \cos \omega t$, riktad i positiv led med avseende på z-axeln, enligt figur. Den andra slingan har resistansen R och rör sig med den konstanta hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$, där $v > 0$. Dess mittpunkt passerar punkten $(20a, 0, 0)$ vid tiden $t = 0$. Vi antar att $v \ll c$ och $c/f \gg x$, där x är avståndet mellan slingorna och $f = \omega/(2\pi)$. Den rörliga slingans självinduktans kan försummas.

a) Bestäm den inducerade strömmen i den rörliga slingan till både storlek och riktning för $t > 0$.

b) Vilken kraft $\boldsymbol{F}(t)$, där $t > 0$ är tiden, krävs för att dra den rörliga slingan med hastigheten $\boldsymbol{v}$?

c) Varför anges att $\dfrac{c}{f} \gg x$? Är dina lösningar till a) och b) fortfarande giltiga om detta inte är uppfyllt? Motivera!

5

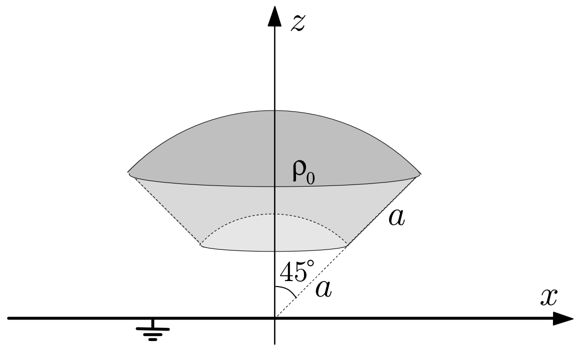


En cirkulär plattkondensator är fylld med ett icke-ledande material med relativ permittivitet $\varepsilon_r(r_c, z)$. Kondensatorplattorna har radien a och avståndet mellan plattorna är d, där $d \ll a$.

a) Bestäm kondensatorns kapacitans om $\varepsilon_r(r_c, z) = 2 + z/d$.

b) Bestäm kondensatorns kapacitans om $\varepsilon_r(r_c, z) = 2 + r_c/a$, där r_c är radiella avståndet från $z-$axeln.

6



Figuren visar ett koniskt område mellan två sfärer, med radierna a respektive $2a$. Konen har öppningsvinkeln 45°, enligt figur, och sfärernas centrum är i origo. Området är fyllt med en konstant rymdladdningstäthet ρ_0 och befinner sig ovanför det jordade planet $z = 0$. Överallt är $\varepsilon_r = 1$.

Bestäm jordplanets ytladdningstäthet i origo.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 12 april, 2018, kl. 08.00–13.00, lokal: Sparta:C.
Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Svar:

a) $\boldsymbol{B}(0,0,0) = \dfrac{\mu_0 I}{\pi a}\hat{\boldsymbol{x}}$

b) $\boldsymbol{B}(a,a,0) = \dfrac{\mu_0 I}{8\pi a}(3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$

Lösning problem 2

a) Kraften på punktladdning är $\boldsymbol{F}_q = \dfrac{qp}{16\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(3\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{z}})$. Totala kraften på systemet är noll och därmed är kraften på dipolen $\boldsymbol{F}_p = -\boldsymbol{F}_q$.

b) Vridande momentet från krafterna i a) är $\boldsymbol{T} = (a,0,a)\times\boldsymbol{F}_q = \dfrac{qp}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{y}}$. Detta kompenseras av vridmomentet på dipolen $\boldsymbol{T}_p = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$, där $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0})$ är det elektriska fältet från punktladdningen. Det ger

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}) = -\frac{q}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}(1,0,1)$$

Därmed fås $\boldsymbol{T}_p = -\dfrac{qp}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\boldsymbol{y}}$. Totala vridmonentet, $\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_p$ är alltså noll.

Lösning problem 3

a) $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0\sin(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}}$

b) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \eta_0^{-1}E_0(\cos(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - \sin(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})$. Regeln om högersystem ger $\boldsymbol{E} = \eta_0\boldsymbol{H}\times\hat{\boldsymbol{z}}$ och därmed

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -E_0(\sin(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + \cos(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}})$$

c) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \eta_0^{-1}E_0\sin(k(x+z)/\sqrt{2}-\omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$. Regeln om högersystem ger $\boldsymbol{E} = \eta_0\boldsymbol{H}\times\hat{\boldsymbol{k}}$ och därmed

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\sin(k(x+z)/\sqrt{2}-\omega t)\,(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{z}})$$

Lösning problem 4

a) Den fixa slingan fungerar som magnetisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{m} = i(t)\pi a^2\hat{\boldsymbol{z}}$. Då $x \gg a$ är magnetiska flödestätheten på positiva $x-$axeln

$$\boldsymbol{B}(x,0,0,t) = -\frac{\mu_0 i(t)\pi a^2}{4\pi x^3}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Flödet i positiv $z-$led genom den rörliga slingan är, där vi använder $x = 20a + vt$,

$$\Phi(t) = -\frac{\mu_0 i(t) \pi a^4}{4(20a + vt)^3}$$

Den inducerade strömmen ges av $i_{\text{ind}}(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(t)}{dt}$, där riktningen är i positiv led i förhållande till $\hat{\boldsymbol{z}}$. Det ger

$$i_{\text{ind}}(t) = -\frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4R(20a + vt)^4} \left(\omega(20a + vt)\sin(\omega t) + 3v\cos(\omega t)\right)$$

b) Kraften måste vara riktad i positiv $x-$ och ges av $\boldsymbol{F}(t) = F(t)\hat{\boldsymbol{x}}$. Effekten som utvecklas i slingan är densamma som den effekt som tillförs av kraften $\boldsymbol{F}$. Det ger sambandet

$$F(t)v = R(i_{\text{ind}}(t))^2$$

och

$$\boldsymbol{F}(t) = \frac{R}{v}\left(\frac{\mu_0 I_0 \pi a^4}{4(20a + vt)^4} \left(\omega(20a + vt)\sin(\omega t) + 3v\cos(\omega t)\right)\right)^2 \hat{\boldsymbol{x}}$$

c) Kravet säger att avståndet x är mycket mindre än våglängden. Då kan vi använda uttrycket för det elektriska fältet från en statisk elektrisk dipol, men med ett tidsharmoniskt dipolmoment. Om kravet inte är uppfyllt fungerar dipolen som en antenn och då är uttrycket för det elektriska fältet mer komplicerat.

Lösning problem 5

a) Lägg en laddning Q på den övre plattan och $-Q$ på den undre. Ytladdningstätheten på den över plattan är då $\rho_{\text{S}} = \frac{Q}{\pi a^2}$. Den elektriska flödestäteheten är konstant mellan plattorna och eftersom $\rho_{\text{S}} = -\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{D}$ fås

$$\boldsymbol{D} = -\frac{Q}{\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Det elektriska fältet ges då av

$$\boldsymbol{E}(z) = -\frac{Q}{\pi a^2 \varepsilon_0 (2 + z/d)}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Spänningen mellan plattorna är $V = -\int_0^d \boldsymbol{E}(z) \cdot \hat{\boldsymbol{z}} \mathrm{d}z$. Det ger

$$V = \frac{Qd}{\pi a^2 \varepsilon_0} \ln(1.5)$$

<u>Svar:</u> Kapacitansen är $C = \dfrac{\pi a^2 \varepsilon_0}{d \ln(1.5)}$

b) Lägg en potential V på den övre plattan och 0 på den undre. Elektriska fältet ges då av $\boldsymbol{E} = -\dfrac{V}{d}\hat{\boldsymbol{z}}$. Den elektriska flödestätheten är $\boldsymbol{D}(r_c) = \varepsilon_0\varepsilon(r_c)\boldsymbol{E}$. Ytladdningstätheten på den övre plattan är $\rho_{\mathrm{S}} = -\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{D}(r_c)$. Det ger

$$\rho_{\mathrm{S}}(r_c) = \frac{V\varepsilon_0}{d}\left(2 + \frac{r_c}{a}\right)$$

Totala laddningen på den övre plattan är

$$Q = 2\pi \int_0^a \rho_{\mathrm{S}}(r_c) r_c \, \mathrm{d}r_c$$

Vilket ger

$$Q = \frac{8\pi V\varepsilon_0 a^2}{3d}$$

Kapacitansen är $C = \dfrac{8\pi\varepsilon_0 a^2}{3d}$

Lösning problem 6

Rymdladdningen speglas i jordplanet. Det gör att det elektriska fältet på ytan av jordplanet endast får en $z-$komponent. Rymdladdnngen och dess spegelladdning ger lika stora bidrag till E-fältet på ytan och därmed till ytladdningstätheten. Rymdladdningen ger följande elektriska fält i origo:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_a^{2a} \int_0^{\pi/4} \frac{(\mathbf{0} - r'\hat{\boldsymbol{r}'})}{(r')^3} (r')^2 \sin\theta' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\phi'$$

Här gäller $\hat{\boldsymbol{r}'} = \cos\phi' \sin\theta' \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi' \sin\theta' \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta' \hat{\boldsymbol{z}}$. Integrationen i $\phi-$led ger att både $x-$ och $y-$komponenterna blir noll. Det återstår

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_a^{2a} \int_0^{\pi/4} \cos\theta' \sin\theta' \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}r' \hat{\boldsymbol{z}}$$

vilket ger

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho_0 a}{8\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{z}}$$

Ytladdningstätheten är $\rho_{\mathrm{S}}(\mathbf{0}) = 2\varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{E}(\mathbf{0})$ och därmed

$$\rho_{\mathrm{S}}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho_0 a}{4}$$