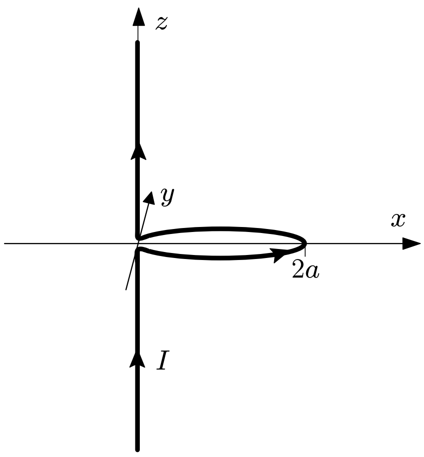
Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (EITF85)

Tid och plats: 25 oktober, 2017, kl. 14.00–19.00, lokal: Gasquesalen.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89 och 0733-325958.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

1

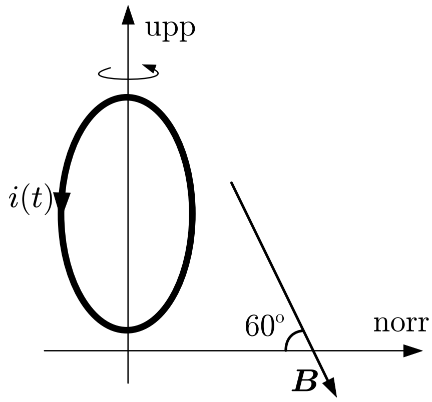


En lång rak vertikal ledare har en horisontell cirkulär böj på mitten, enligt figur. Cirkeln har radien a och ligger i planet $z = 0$. En ström I drivs genom ledaren. Du skall bestämma magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ i två fall:

a) Bestäm $\boldsymbol{B}(a, 0, 0)$ (i mitten av cirkeln.).

b) Bestäm ett approximativt värde på $\boldsymbol{B}(10a, 0, 0)$.

2

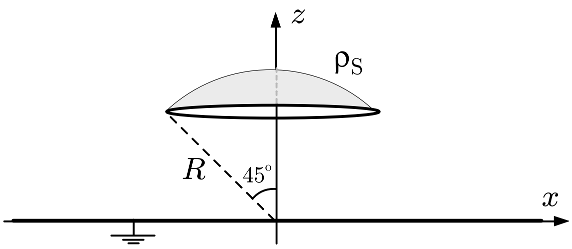


En cirkulär metallslinga har radien 1 meter. Den är tillverkad av ett aluminiumrör med ytterradie 3 mm och innerradie 2 mm och är upphängd så att den kan rotera runt en vertikal axel, enligt figur. Bestäm den inducerade strömmen $i(t)$ i slingan om denna roterar med frekvensen 1 Hz. Du behöver inte ange strömmens referensriktning.

Fakta:

- Slingan är placerad på en plats där jordmagnetiska fältet är riktat 60 grader mot jordytan, enligt figur, och har styrkan 50 μT.
- Vid tiden $t = 0$ är slingan orienterad så att dess cirkulära yta har en normal som pekar i västlig riktning.
- Vid beräkningen av flödet genom slingan behöver du inte ta hänsyn till röret utan du skall använda att slingans yta är π m^2.
- Konduktiviteten för aluminium är $\sigma = 4 \cdot 10^7$ S/m.
- De numeriska beräkningarna är såpass enkla att du inte behöver kalkylator. π får ingå i svaret.

3

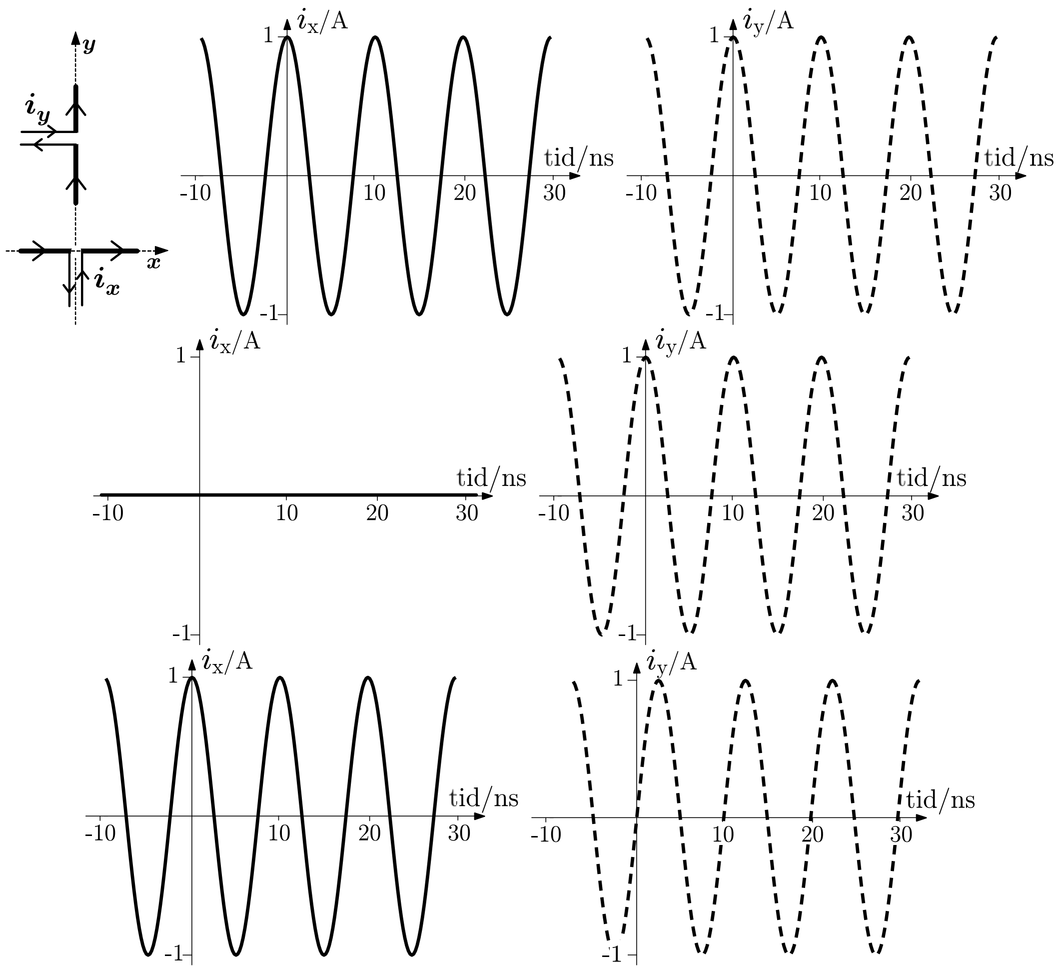


En sfärisk kalott med konstant ytladdningstäthet ρ_S befinner sig ovanför ett jordat metallplan, enligt figur. Kalotten har öppningsvinkeln 45° och sfären har radien R. Det råder vakuum ovanför skivan.

a) Vad är totala laddningen på jordplanets ovansida?

b) Vad är ytladdningstätheten i punkten $(0, 0, 0)$.

4



Med två identiska linjära antenner, se figur, kan man bestämma det elektriska fältet för en planvåg som färdas i positiv $z-$led. Strömmen i en antenn, orienterad vinkelrätt mot vågens utbredningsriktning, är proportionell mot $\hat{\boldsymbol{e}}_{\text{ant}} \cdot \boldsymbol{E}(0,t)$, där $\hat{\boldsymbol{e}}_{\text{ant}}$ är en enhetsvektor i antennens riktning. Antennerna är placerade i planet $z=0$ och är kalibrerade så att en ström av 1 A motsvarar fältstyrkan 10 V/m. Den ena antennen har $\hat{\boldsymbol{e}}_{\text{ant}} = \hat{\boldsymbol{x}}$ och dess ström ges av de heldragna kurvorna. Den andra har $\hat{\boldsymbol{e}}_{\text{ant}} = \hat{\boldsymbol{y}}$ och dess ström ges av de streckade kurvorna. Det råder vakuum.

a) Vad är våglängden för de infallande vågorna? (notera att skalan är i ns)

b) Bestäm $\boldsymbol{E}(z,t)$ och $\boldsymbol{H}(z,t)$ om strömmarna ges av de två översta graferna. Vilken typ av planvåg är detta? (välj mellan linjär-, elliptisk och cirkulärpolariserad).

c) Bestäm $\boldsymbol{E}(z,t)$ och $\boldsymbol{H}(z,t)$ om strömmarna ges av de två mittersta graferna. Vilken typ av planvåg är detta?

d) Bestäm $\boldsymbol{E}(z,t)$ och $\boldsymbol{H}(z,t)$ om strömmarna ges av de två understa graferna. Vilken typ av planvåg är detta?

e) Man kan få starkare signaler om en stor metallskiva placeras på lämpligt sätt i närheten av antennerna. Var skall metallskivan placeras så att du får maximalt starka signaler? Hur mycket starkare strömmar ger detta?.

5

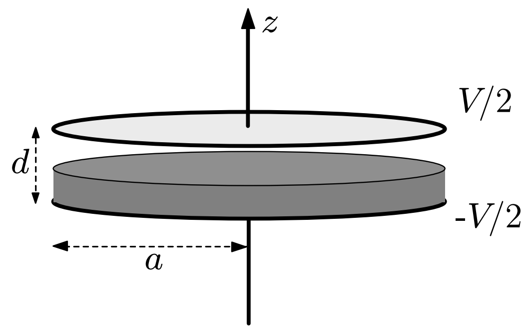
Två koncentriska perfekt ledande sfärer har radierna a och $2a$.

a) Bestäm resistansen mellan sfärerna om området mellan sfärerna är fyllt med ett material med konduktiviteten σ_0.

b) Man fyller området mellan sfärerna med ett material med konduktivitet $\sigma(r)$ och driver strömmen I från den inre sfären till den yttre. Hur skall $\sigma(r)$ väljas så att det elektriska fältet överallt mellan sfärerna ges av $\boldsymbol{E} = E_0\hat{\boldsymbol{r}}$, där E_0 är en konstant? Uttryck $\sigma(r)$ i I, E_0 och r.

c) Bestäm den fria laddningstätheten $\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r})$ mellan sfärerna i uppgift b). Relativa permittiviteten är $\varepsilon_{\mathrm{r}} = 1$ i materialet. Uttryck $\rho_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{r})$ i I, E_0 och ε_0.

6



En cirkulär plattkondensator har radien a och avståndet d mellan plattorna, där $d \ll a$. På den undre plattan ligger en cirkulär dielektrisk skiva med tjocklek $d/2$, radien a och relativa permittiviteten ε_{r}. I resten av utrymmet är det luft ($\varepsilon_r = 1$). Kondensatorn har konstant spänning V.

a) Bestäm laddningen på den övre plattan uttryckt i V, d, a, ε_0 och ε_{r}.

b) Kondensatorn utsätts nu för vibrationer vilket gör att den övre plattan rör sig sinusformat i tiden, medan den undre plattan är fix. Översidan av den undre plattan är vid $z = 0$ och undersidan av den övre plattan vid $z(t) = d + \delta\cos(\omega t)$, där $\delta < d/2$. Kondensatorn har fortfarande konstant spänning V. Bestäm magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ i hela området mellan plattorna.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 25 oktober, 2017, kl. 14.00–19.00, lokal: Gasquesalen.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

Den raka ledaren ger $\boldsymbol{B}(r_c) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

a) Biot-Savarts lag ger bidraget $\boldsymbol{B}_1(a,0,0) = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\hat{\boldsymbol{z}}$ från cirkeln. Det ger

Svar: $\boldsymbol{B}(a,0,0) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}(\hat{\boldsymbol{y}} + \pi\hat{\boldsymbol{z}})$

b) Dipolapproximationen ger bidraget $\boldsymbol{B}_1(10a,0,0) = -\dfrac{\mu_0 I}{4\cdot 9^3 a}\hat{\boldsymbol{z}}$ från cirkeln. det ger

Svar: $\boldsymbol{B}(10a,0,0) = \dfrac{\mu_0 I}{4a}\left(\dfrac{1}{5\pi}\hat{\boldsymbol{y}} - \dfrac{1}{729}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$

Lösning problem 2

Slingan har radien $a = 1$ m. röret har innerradie $b = 2$ mm och ytterradie $c = 3$ mm. Resistansen i slingan är då

$$R = \frac{2\pi a}{\sigma\pi(c^2 - b^2)}$$

Det ger

$$R = 0.01\,\Omega$$

Endast den horisontella komponenten av $\boldsymbol{B}$ ger bidrag till flödet. Flödet ges då av

$$\Phi(t) = 0.5 B_0 \pi a^2 \sin(\omega t)$$

där $\omega = 2\pi$ rad/s, $B_0 = 50\ \mu T$ och $a = 1$ m. Den inducerade emk:n är

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -0.5 B_0 \omega\pi a^2 \cos(\omega t)$$

Det ger strömmen

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = -R^{-1} 0.5 B_0 \omega \pi a^2 \cos(\omega t)$$

Insättning av numeriska värden ger

Svar: $i(t) = -5\pi^2\cos(2\pi t)$ mA. Riktningen, och därmed tecknet på i, har enligt uppgiftstexten ingen betydelse.

Lösning problem 3

a) Jordplanets laddning är lika med totala laddningen av spegelladdningarna, Det ger

$$q_{\text{jord}} = -\rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} R^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

Svar: $q_{\text{jord}} = -\rho_0 R^2 \pi (2 - \sqrt{2})$

b) $\rho_{\text{S}} = \varepsilon_0 \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{E}(0,0,0)$. Vi får lika stora bidrag till $\boldsymbol{E}$ från kalotten och dess spegelbild. Bidraget till $\boldsymbol{E}$ från kalotten är

$$\boldsymbol{E}_1(0,0,0) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\boldsymbol{0} - R\hat{\boldsymbol{r}}}{R^3} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi$$

Eftersom $\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta$ fås

$$\hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{E}_1(0,0,0) = -\frac{\rho_0}{8\varepsilon_0}$$

Svar: $\rho_{\text{S}}(0,0,0) = -\dfrac{\rho_0}{4}$

Lösning problem 4

a) $T = 10$ ns. $\lambda = \dfrac{c}{f} = cT$. Svar: $\lambda = 3$ m.

b) Svar: $\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$, där $E_0 = 10$ V/m, $k = \dfrac{2\pi}{3}$ m^{-1} och $\omega = 2\pi \cdot 10^8$ rad/s. Vågen är linjärpolariserad.

c) Svar: $\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$. Vågen är linjärpolariserad.

d) Svar: $\boldsymbol{E}(z,t) = E_0(\cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}})$. Vågen är cirkulärpolariserad.

d) Svar: Skivan skall placeras i planet $z = -\dfrac{\lambda}{4} = -75$ centimeter. Då fås en stående våg för $z > -75$ cm. Amplituden på $\boldsymbol{E}$ fördubblas vid antennerna. Strömmarna blir dubbelt så stora.

Lösning problem 5

a) Man kan antingen bestämma R genom serikoppling av sfäriska skal eller gå via elektriska fältet. Gör vi det senare så börjar vi med en ström I som går från den inre till den yttre sfären. Det måste gå samma ström genom varje sfärisk yta. det ger strömtätheten

$$\boldsymbol{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad a < r < 2a$$

Det elektriska fältet ges av Ohms lag

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Spänningen mellan en inre och yttre sfären är

$$V = \int_a^{2a} \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \, \mathrm{d}r = \frac{I}{8\pi\sigma_0 a}$$

Det ger resistansen $R = V/I$

Svar: $R = \dfrac{1}{8\pi\sigma_0 a}$

b) Från Ohms lag fås $\boldsymbol{J}(r) = \sigma(r)\boldsymbol{E}(r)$. Eftersom

$$\boldsymbol{J}(r) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \quad a < r < 2a$$

måste gälla att

$$\sigma(r) = \frac{I}{4\pi E_0 r^2}$$

c) Den fria laddningstätheten ges av Gauss lag $\rho_\mathrm{f}(r) = \nabla \cdot \boldsymbol{D}(r)$. Eftersom $\varepsilon_r = 1$ och $\nabla \cdot \boldsymbol{E}(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 E_0)}{\partial r}$ fås

Svar: $\rho(_\mathrm{f} r) = \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r}$ för $a < r < 2a$

Lösning problem 6

a) Kapacitansen fås enklast ur kapacitansen för två seriekopplade kapacitanser C_1 och C_2 där $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi a^2}{d}$ och $C_2 = \dfrac{\varepsilon_0 2\pi a^2}{d}$. Totala kapacitansen är

$$C = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\frac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{d}$$

Det ger

Svar: $Q = V\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}\dfrac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{d}$

b) När den övre plattan rör sig kommer kapacitansen att ändras. Därmed ändras laddningarna på plattorna och det elektriska fältet mellan plattorna. Det i sin tur kommer att inducera ett magnetfält mellan plattorna.

Seriekoppling ger kapacitansen

$$C(t) = \frac{2\pi a^2 \varepsilon_0 \varepsilon_r}{d(\varepsilon_r + 1) + 2\delta\varepsilon_r \cos(\omega t)}$$

Den elektriska flödestätheten mellan plattorna ges av $\boldsymbol{D} = -\rho_\mathrm{S}\hat{\boldsymbol{z}} = -Q(t)/(\pi a^2)\hat{\boldsymbol{z}}$

$$\boldsymbol{D}(t) = -\frac{C(t)V}{\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}, \quad r_c < a$$

eftersom $Q(t) = C(t)V$.

Av symmetriskäl gäller $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = B(r_c,t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Vi applicerar Amperes lag på en cirkel med radien $r_c < a$, och låter normalen till ytan som spänns upp av cirkeln vara $\hat{\boldsymbol{z}}$

$$B(r_c,t)2\pi r_c = \mu_0 \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}(t)}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{d}S$$

Det ger

Svar:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = -V \frac{2\mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r^2\delta\omega r_c}{(d(\varepsilon_r+1)+2\delta\varepsilon_r\cos(\omega t))^2}\sin(\omega t)\hat{\boldsymbol{\phi}}$$