Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (ETE055)

Tid och plats: 7 januari, 2015, kl. 8.00–13.00, lokal: MA09, E–F.

Kursansvarig lärare: Anders Karlsson, tel. 222 40 89.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

Problem 1

En cirkulärpolariserad elektromagnetisk våg i vakuum har följande elektriska fält:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = E_0 \left\{ \cos(k_0 y - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{z}} + \sin(k_0 y - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{x}} \right\}$$

där $k_0 = \omega / c_0$.

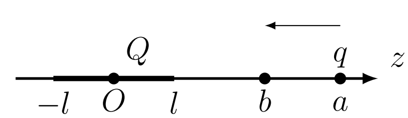
a) Bestäm vågens utbredningsriktning $\hat{\boldsymbol{k}}$

b) Bestäm magnetfältet $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$

c) Bestäm strålningsvektorn $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$

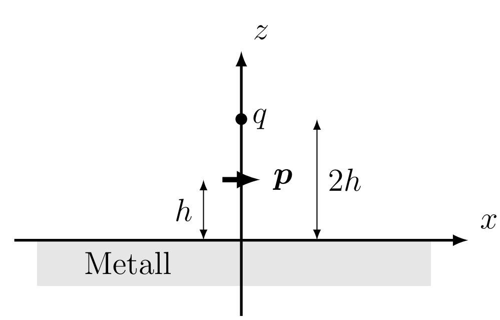
Problem 2

En tunn, rak stav av längd $2l$ är uppladdad med en jämnt fördelad totalladdning Q. Parallellt med stavens symmetriaxel, på avståndet a från stavens centrum i O ($z = 0$), finns en punktladdningen q, se figur. Hur stort yttre arbete W_e krävs för att föra punktladdningen till avståndet b från stavens centrum (pilen visar förflyttningen ($l < b < a$)).



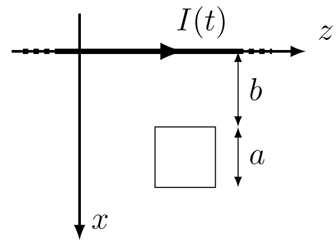
Problem 3

En horisontell elektrisk dipol $\boldsymbol{p} = p\hat{\boldsymbol{x}}$ befinner sig i punkten $\boldsymbol{r} = (0, 0, h)$ ovan ett oändligt stort jordat metallplan, $z = 0$. I halvrymden $z > 0$ är det vakuum. Bestäm kraften, till storlek och riktning, på en punktladdning q, som befinner sig i punkten $(0, 0, 2h)$.



Problem 4

En kvadratisk slinga med sida a och resistans R ligger fixerad i x-z-planet med ena sidan parallell med en rak ledare. Slingans närmaste kant ligger på avståndet b från ledaren, se figur. Ledaren är orienterad längs z-axeln och för strömmen $I(t) = I_0 \sin \omega t$.



a) Bestäm det magnetiska flödet, $\Phi(t)$, genom slingan som funktion av tiden.

b) Bestäm den inducerade emk:n, $\mathcal{V}(t)$, i slingan som funktion av tiden.

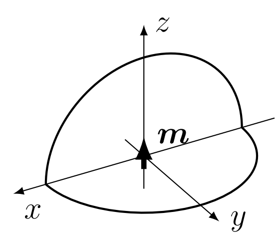
c) Bestäm den inducerade strömmen, $I_{\text{Slinga}}(t)$, (både storlek och riktning) i slingan som funktion av tiden.

d) Bestäm kraften, $\boldsymbol{F}_{\text{Slinga}}(t)$, (både storlek och riktning) på slingan som funktion av tiden. Det är denna kraft som måste motverkas (genom en yttre kraft) för att hålla slingan på plats.

Slingans självinduktans får försummas.

Problem 5

En magnetisk dipol med dipolmomentet $\boldsymbol{m} = \hat{\boldsymbol{z}} m$ befinner sig i origo. En yta spänns upp av de två halvcirklarna $\boldsymbol{r} = a(\cos\phi, \sin\phi, 0)$ där $0 \leq \phi \leq \pi$ och $\boldsymbol{r} = a(\cos\psi, 0, \sin\psi)$ där $0 \leq \psi \leq \pi$, se figur.



a) Bestäm flödet genom ytan genom att använda den magnetiska flödestätheten och en ytintegral.

b) Bestäm flödet genom ytan genom att använda vektorpotentialen och en linjeintegral.

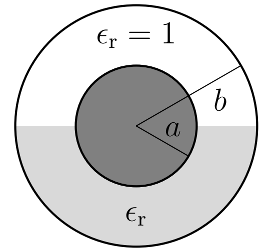
Ledning: Stokes sats säger att om $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ så gäller

$$\int_S \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}\, dS = \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

där C är randkurvan till ytan S. Du finner uttrycken för $\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{A}$ i formelsamlingen.

Problem 6

En koaxialkabel består av två metalliska ledare med radierna b och a, se figur. Mellan ledarna finns en potentialskillnad V. Området mellan ledarna är till hälften fyllt med luft ($\epsilon_{\text{r}} = 1$) och till hälften med ett dielektrikum med relativ dielektricitetskonstant ϵ_{r}, Beräkna systemets elektrostatiska energi per längdenhet uttryckt i angivna storheter.



Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Tid och plats: 7 januari, 2015, kl. 8.00–13.00, lokal: MA09, E–F.
Kursansvarig lärare: Anders Karlsson.

Lösning problem 1

a) En allmän tidsharmonisk, plan elektromagnetisk våg har rums- och tidsberoendet $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t$, där $\boldsymbol{k}$ är vågvektorn och $\hat{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ är utbredningsriktningen. I vårt fall gäller

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=k_0 y$$

där $k_0=\omega/c_0$, och därmed är $\boldsymbol{k}=k_0\hat{\boldsymbol{y}}$. Det ger utbredningsriktningen

$$\boxed{\hat{\boldsymbol{k}}=\hat{\boldsymbol{y}}}$$

Kontroll:

$$\hat{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\hat{\boldsymbol{y}}\cdot E_0\left\{\cos\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{z}}+\sin\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{x}}\right\}=0$$

b) Magnetfältet ges av regeln om högersystem

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\eta_0}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{\eta_0}\hat{\boldsymbol{y}}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$$

Detta ger

$$\boxed{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{E_0}{\eta_0}\left\{\cos\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{x}}-\sin\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right\}}$$

c) Strålningsvektorn ges av $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ Detta ger

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\frac{E_0^2}{\eta_0}\left\{\cos^2\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{y}}+\sin^2\left(k_0 y-\omega t\right)\hat{\boldsymbol{y}}\right\}$$

$$\boxed{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\frac{E_0^2}{\eta_0}\hat{\boldsymbol{y}}}$$

Kommentar: Vågen är en cirkulärpolariserad planvåg, och då skall gälla att strålningsvektorn är riktad i utbredningsriktningen, och har en amplitud, som är konstant i rum och tid.

Lösning problem 2

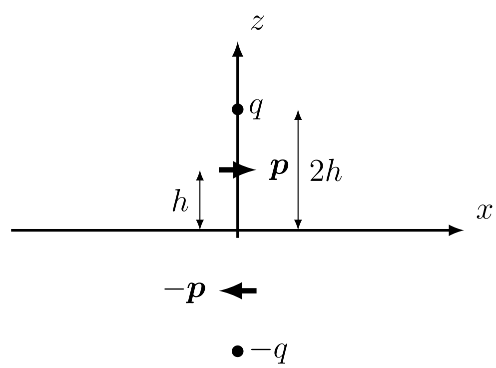
Potentialen i en punkt $z > l$ på z-axeln ges av

$$\begin{aligned} V(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{2l}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}z'}{|z-z'|} = \frac{Q}{8\pi l\epsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{\mathrm{d}z'}{z-z'} \\ &= \frac{Q}{8\pi l\epsilon_0}\ln(z+l) - \frac{Q}{8\pi l\epsilon_0}\ln(z-l) = \frac{Q}{8\pi a\epsilon_0}\ln\frac{z+l}{z-l} \end{aligned}$$

Arbetet W_e blir

$$\begin{aligned} W_\mathrm{e} =& q(V(b)-V(a)) = \frac{Qq}{8\pi l\epsilon_0}\ln\frac{b+l}{b-l} - \frac{Qq}{8\pi l\epsilon_0}\ln\frac{a+l}{a-l} \\ =& \frac{Qq}{8\pi l\epsilon_0}\ln\frac{(b+l)(a-l)}{(b-l)(a+l)} = \frac{Qq}{8\pi l\epsilon_0}\ln\left(1+\frac{2l(a-b)}{(a+l)(b-l)}\right) \end{aligned}$$

Lösning problem 3



Vi speglar dipolen i planet $z = 0$. Det ger upphov till en spegeldipol $-\boldsymbol{p} = -p\hat{\boldsymbol{x}}$ i punkten $\boldsymbol{r} = (0,0,-h)$. Vidare ger punktladdningen själv upphov till en spegelladdning $-q$ i punkten $\boldsymbol{r} = (0,0,-2h)$. Kraften på punktladdningen ges av $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}(0,0,2h)$ där $\boldsymbol{E}(0,0,2h)$ är det elektriska fältet från dipolen, dess spegeldipol och spegelladdningen. Formeln för det elektriska fältet från en dipol i origo är

$$\boldsymbol{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\right)$$

där vinkeln θ räknas från positiva x-axeln.
Bidragen till det elektriska fältet i $(0,0,2h)$ från dipolen är ($r = h$ och $\theta = \pi/2$)

$$\boldsymbol{E}_1 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 h^3}\hat{\boldsymbol{x}}$$

och fältet från dess spegeldipol är ($r = 3h$ och $\theta = \pi/2$)

$$\boldsymbol{E}_2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 h^3}\frac{1}{27}\hat{\boldsymbol{x}}$$

med summa

$$\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 h^3}\frac{26}{27}\hat{\boldsymbol{x}}$$

För spegelladdningen gäller att avståndet $4h$. Därmed blir bidraget från spegelladdningen

$$\boldsymbol{E}_3 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2}\frac{1}{16}\hat{\boldsymbol{z}}$$

till det elektriska fältet.
Detta ger totalt kraften

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\frac{qp}{4\pi\epsilon_0 h^3}\frac{26}{27}\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h^2}\frac{1}{16}\hat{\boldsymbol{z}}}$$

Lösning problem 4

Magnetiska flödestätheten från en lång, rak ledare ges av $\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\phi}}$, där ρ anger avståndet till ledaren. I x-z-planet är $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{y}}$. I en punkt $(x, 0, z)$, där $x > 0$, blir den magnetiska flödestätheten

$$\boldsymbol{B}(x, 0, z, t) = \frac{\mu_0 I(t)\hat{\boldsymbol{y}}}{2\pi x}$$

a) Flödet $\Phi(t)$ blir (välj $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{y}}$, som sedan bestämmer positiv omloppsriktning på den inducerade strömmen — medurs i figuren)

$$\Phi(t) = \iint\limits_{\text{Slinga}} \boldsymbol{B}(x, 0, z, t) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi}\int_b^{a+b}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 a I(t)}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

b) Den inducerade emk:n ges av

$$\mathcal{V}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 a\omega I_0 \cos\omega t}{2\pi}\ln\frac{a+b}{b}$$

c) Den inducerade strömmen är

$$I_{\text{Slinga}}(t) = \frac{\mathcal{V}(t)}{R} = -\frac{\mu_0 a\omega I_0 \cos\omega t}{2\pi R}\ln\frac{a+b}{b}$$

och den positiva riktningen är medurs.

d) Kraften fås av BIL-formeln[1]. De båda sidorna som går i x-led ger inget net-

[1] BIL-formeln är en benämning på kraften på slingan L

$$\boldsymbol{F}_{\text{Slinga}}(t) = I\oint\limits_L \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$$

tobidrag till kraften. De två andra sidorna ger

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\text{Slinga}}(t) &= I_{\text{Slinga}}(t)a\hat{\boldsymbol{z}} \times (\boldsymbol{B}(b,0,z,t) - \boldsymbol{B}(a+b,0,z,t)) \\
&= I_{\text{Slinga}}(t)\frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b}\right)\hat{\boldsymbol{x}} \\
&= -\frac{\mu_0 I(t) I_{\text{Slinga}}(t) a^2}{2\pi b(a+b)}\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{\mu_0^2 a^3 \omega I_0^2 \sin\omega t \cos\omega t \ln\frac{a+b}{b}}{4\pi^2 R b(a+b)}\hat{\boldsymbol{x}}
\end{aligned}$$

Lösning problem 5

Formelsamlingen ger

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$$
$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

a) Eftersom $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$ kan vi välja en godtycklig yta att integrera över. Det är enklast att integrera över ytan av en kvartssfär: För denna gäller $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{r}}$. Ytintegralen blir

$$\boxed{\Phi = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} 2\cos\theta a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi a}\pi \int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\sin\theta \, d\theta = \frac{\mu_0 m}{4a}}$$

b) Linjeintegralen kan skrivas

$$\Phi = \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_0^{\pi} \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} a \, d\phi + \int_0^{\pi} \boldsymbol{A}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} a \, d\psi$$

Den andra integralen är noll eftersom $\boldsymbol{A}$ är vinkelrät mot $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. Därmed fås

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 m}{4a}}$$

Lösning problem 6

Det elektriska fältet i området mellan ytter- och innerledare har av symmetri- och randvillkors-skäl följande utseende

$$\boldsymbol{E} = E(r_{\text{c}})\hat{\boldsymbol{r}}_{\text{c}}$$

där r_{c} är avståndet till koaxialkabelns centrumlinje. Funktionsberoendet hos $E(r_{\text{c}})$ ges av Gauss lag (antag att en fri laddning Q/l.e. existerar på innerledaren). Per längdenhet får vi följande (S en cylinderyta med radie r_{c}):

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \, \text{d}a = Q \Longrightarrow \pi r_{\text{c}}\epsilon_0 E(r_{\text{c}}) + \pi r_{\text{c}}\epsilon_0\epsilon_r E(r_{\text{c}}) = Q \Longrightarrow E(r_{\text{c}}) = \frac{Q}{\pi r_{\text{c}}\epsilon_0(1+\epsilon_r)}$$

och potentialskillnaden $V = V(\text{innerledare}) - V(\text{ytterledare})$ blir

$$V = -\int_{\text{ytterledare}}^{\text{innerledare}} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{Q\ln(b/a)}{\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)} \Longrightarrow E(r_\mathrm{c}) = \frac{V}{r_\mathrm{c}\ln(b/a)}$$

Den totala elektrostatiska energin per längdenhet blir

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\ \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{V^2\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{r_\mathrm{c}^2(\ln(b/a))^2}\pi r_\mathrm{c}\ \mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{V^2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)}{2\ln(b/a)}$$