Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för π3 (ETEF01) och F3 (EITF85)

Datum: 12 april, 2021.

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

Betygsättning: Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5. Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsordning.

1

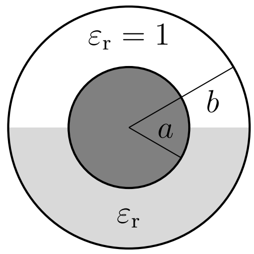
Ett klot med radien R och centrum i origo har rymdladdningstätheten $\rho(\boldsymbol{r}) = \rho_0 \cos\theta$, där θ är polvinkeln från $z-$axeln. Det gäller att $\varepsilon_{\rm r} = 1$ i hela rummet.

a) Bestäm potentialen i origo.

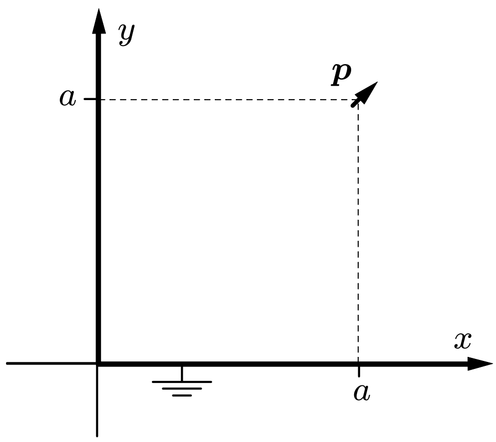
b) Bestäm elektriska fältet i origo.

2

En koaxialkabel består av två metalliska ledare med radierna b och a, se figur. Mellan ledarna finns en potentialskillnad V_0. Området mellan ledarna är till hälften fyllt med vakuum och till hälften med ett dielektrikum med relativ permittivitet $\varepsilon_{\rm r}$, Beräkna systemets elektrostatiska energi per längdenhet uttryckt i angivna storheter.



3

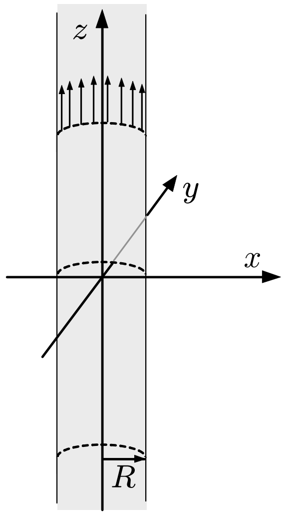


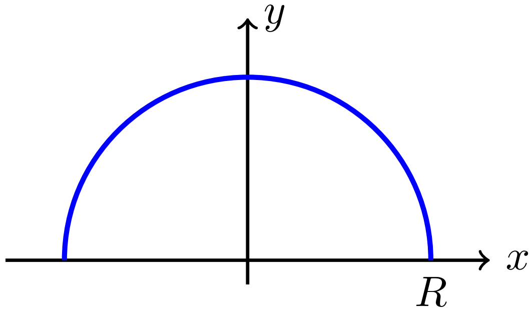
En elektrisk dipol med dipolmoment $\boldsymbol{p} = p(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$ befinner sig i punkten $\boldsymbol{r} = a(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$. enligt figur. De halvoändliga ytorna $x = 0$, $y > 0$ och $y = 0$, $x > 0$ är av metall och hålls vid potentialen noll. I området där $x > 0$, $y > 0$ är det vakuum.

a) Bestäm dipolens energi $W_{\rm d} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$.

b) Bestäm det vridande momentet på dipolen.

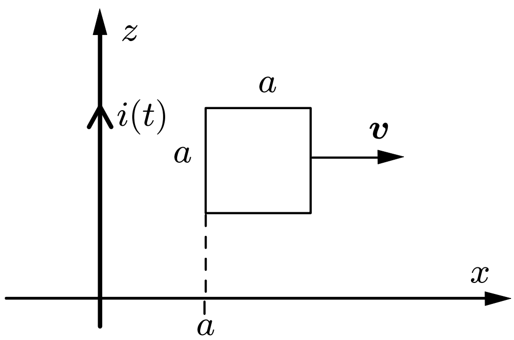
4





En lång rak ledare består av ett tunt halvt rör, enligt figur (vänster). Tvärsnittet är en halvcirkel med radien R (figur till höger). Det flyter en ström I uppåt i ledaren och strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittet. Bestäm magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ längs $z-$axeln.

5



Längs z-axeln finns en ledare som för strömmen $i(t)$. En kvadratisk metallslinga med resistans R och sida a är i planet $y = 0$ och rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v} = v\hat{\boldsymbol{x}}$, där $v > 0$. Vid tiden $t = 0$ gäller att $i(0) = I_0 > 0$ och att slingan befinner sig i läget som visas i figuren, d.v.s. med vänstra sidan på avståndet a från den raka ledaren. Bestäm $i(t)$ så att det inte utvecklas någon effekt i slingan för $t \geq 0$.

6

Två linjärpolariserade vågor utbreder sig i vakuum. De två har elektriska fälten

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\hat{\boldsymbol{z}}$$
$$\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - ky)\hat{\boldsymbol{z}}$$

Bestäm totala Poyntings vektor $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)$ och dess tidsmedelvärde $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}t$ (periodtid T) överallt.

Lösningar till tentamen i EF för π3 och F3

Datum: 12 april, 2021.

Lösning problem 1

a) Av symmetriskäl kommer potentialen i origo att vara noll. Ser man inte detta kan man integrera upp den

$$V(\mathbf{0}) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\frac{\cos\theta}{r}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Det ger $V(\mathbf{0}) = 0$ eftersom $\cos\theta\sin\theta = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ och $\int_0^{\pi}\sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$.

Svar: $V(\mathbf{0}) = 0$

b) Det elektriska fältet i origo ges av

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}\cos\theta r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$

Av symmetriskäl måste $\boldsymbol{E}$ vara riktat i $z-$led. Eftersom $\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\theta$ och

$$\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{1}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\cos\theta = \frac{2}{3}$$

fås svaret:

$$\boldsymbol{E}(\mathbf{0}) = -\frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Lösning problem 2

Det elektriska fältet i området mellan ytter- och innerledare har av symmetri- och randvillkors-skäl följande utseende

$$\boldsymbol{E} = E(r_\mathrm{c})\hat{\boldsymbol{r}}_\mathrm{c}$$

där r_c är avståndet till koaxialkabelns centrumlinje. Funktionsberoendet hos $E(r_\mathrm{c})$ ges av Gauss lag (antag att en fri laddning Q/l.e. existerar på innerledaren). Per längdenhet får vi följande (S en cylinderyta med radie r_c):

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}a = Q \Longrightarrow \pi r_\mathrm{c}\varepsilon_0 E(r_\mathrm{c}) + \pi r_\mathrm{c}\varepsilon_0\varepsilon_r E(r_\mathrm{c}) = Q \Longrightarrow E(r_\mathrm{c}) = \frac{Q}{\pi r_\mathrm{c}\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}$$

och potentialskillnaden $V_0 = V(\text{innerledare}) - V(\text{ytterledare})$ blir

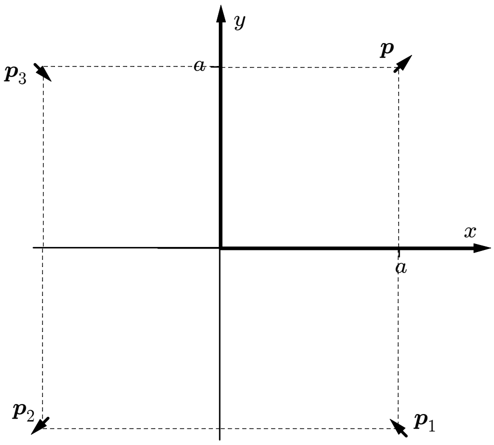
$$V_0 = \int_{\text{innerledare}}^{\text{ytterledare}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{Q\ln(b/a)}{\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)} \Longrightarrow E(r_\mathrm{c}) = \frac{V_0}{r_\mathrm{c}\ln(b/a)}$$

Den totala elektrostatiska energin per längdenhet ger svaret:

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_a^b\frac{V_0^2\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}{r_\mathrm{c}^2(\ln(b/a))^2}\pi r_\mathrm{c}\,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{V_0^2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}{2\ln(b/a)}$$

(energin kan också fås från uttrycket $W_\mathrm{e} = 0.5QV$)

Lösning problem 3



Dipolen speglas i metallplanen och ger upphov till de tre spegeldipolerna i figuren. Dipolen $\boldsymbol{p}_1 = p(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$ ligger i $\boldsymbol{r}_1 = (a, -a, 0)$, $\boldsymbol{p}_2 = -p(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$ ligger i $\boldsymbol{r}_1 = -(a, a, 0)$ och $\boldsymbol{p}_3 = p(\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{y}})$ ligger i $\boldsymbol{r}_3 = (-a, a, 0)$.

I punkten $\boldsymbol{r} = (a, a, 0)$ ger $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ och $\boldsymbol{p}_3$ tillsammans upphov till det elektriska fältet $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r})$ där

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(2a)^3}(\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{y}} + 1/\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{x}}) \\
\boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}) &= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}2a)^3}2(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}) \\
\boldsymbol{E}_3(\boldsymbol{r}) &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0(2a)^3}(\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{x}} + 1/\sqrt{2}\hat{\boldsymbol{y}})
\end{aligned}$$

Det ger $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \dfrac{p}{4\pi\varepsilon_0(2a)^3}\sqrt{2}(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$.

a) Energin är $W_\mathrm{d} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\dfrac{\sqrt{2}p^2}{2\pi\varepsilon_0(2a)^3}$.

b) Vridmomentet är $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$. (Detta följer också av symmetrin.)

Lösning problem 4

Använd Ampères lag och cylinderkoordinater. Dela in ledaren i små vinkelintervall $\mathrm{d}\phi$ med ström $\dfrac{I}{\pi}\mathrm{d}\phi$ och där $0 < \phi < \pi$. Använd att magnetiska flödestätheten från en lång rak ledare längs $z-$axeln är $\mu_0 I/2\pi r_c \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Vi vet att r_c skall vara R men vi måste ha rätt riktning på $\boldsymbol{B}$ från varje vinkelintervall. Geometrin ger att varje vinkelintervall ger magnetiska flödestätheten

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}(\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} - \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}})\mathrm{d}\phi$$

Vi summerar alla bidragen

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_0^{\pi} (\sin\phi \hat{\boldsymbol{x}} - \cos\phi \hat{\boldsymbol{y}}) \mathrm{d}\phi$$

Det ger svaret:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} \hat{\boldsymbol{x}}$$

Lösning problem 5

Flödet genom slingan ges av

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{2a + vt}{a + vt}\right)$$

För att inte få en inducerad ström i slingan krävs att

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = 0.$$

Därmed måste $\Phi(t)$ var konstant och lika med $\Phi(0)$. Det ger

Svar: $i(t) = I_0 \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(\dfrac{2a + vt}{a + vt}\right)}$

Lösning problem 6

Magnetfälten ges av regeln om högersystem

$$\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}, t) = -\eta_0^{-1} E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{\boldsymbol{y}}$$
$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}, t) = \eta_0^{-1} E_0 \cos(\omega t - ky) \hat{\boldsymbol{x}}$$

Totala Poyntingvektorn är

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = (\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{r}, t)) \times (\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}, t) + \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}, t))$$

Insättning av fältuttrycken ger

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = \eta_0^{-1} E_0^2 \left(\cos^2(\omega t - kx) \hat{\boldsymbol{x}} + \cos^2(\omega t - ky) \hat{\boldsymbol{y}} + \cos(\omega t - kx) \cos(\omega t - ky)(\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})\right)$$

Tidsmedelvärdet av $\cos^2(\omega t - kx)$ och $\cos^2(\omega t - ky)$ är $\dfrac{1}{2}$. Vi använder sedan

$$\cos(\omega t - kx) \cos(\omega t - ky) = 0.5 \left(\cos(2\omega t - k(x + y)) + \cos(k(x - y))\right)$$

Tidsmedelvärdet av $\cos(2\omega t - k(x+y))$ är noll och tidsmedelvärdet av $\cos(k(x-y))$ är $\cos(k(x - y))$. Det ger

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) = \frac{E_0^2}{2\eta_0} \left(1 + \cos(k(x - y))\right) (\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$$