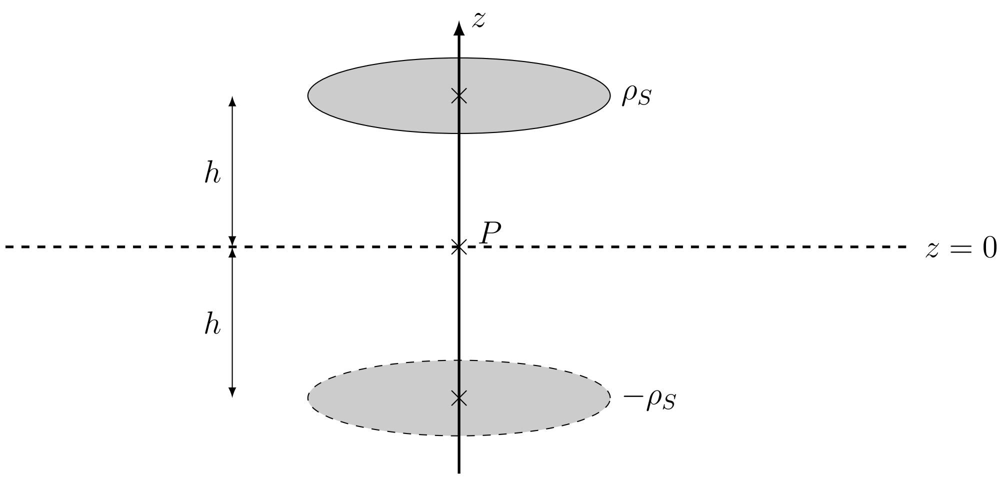
Lösningar till seminarieuppgifter 2018-09-26

Uppgift 1



Introducera ett koordinatsystem så att det jordade planet sammanfaller med planet $z = 0$, och skivans centrum med punkten $(0, 0, h)$.

a) Problemet består av flera delproblem:

1. Spegla ytladdningen i planet för att få rätt fältbild i området ovanför planet
2. Ytladdningstätheten i punkten P ges av $\rho_S^{\text{plan}}(P) = \epsilon_0 \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{0})$ där $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0})$ är fältet från skivan och dess spegelbild
3. Inse att bidragen från skivan och dess spegelbild ger lika stort bidrag i planet
4. Bestäm det elektriska fältet i origo från skivan och dess spegelbild
5. Från det elektriska fältet bestäm ytladdningstätheten på planet

Steg 4: Fältet från enbart skivan i punkten $(0, 0, 0)$ ges av ($\boldsymbol{r}' = \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\hat{\boldsymbol{z}}$)

$$\boldsymbol{E}_1(\boldsymbol{0}) = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\text{Skivan}} \frac{\boldsymbol{0} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{0} - \boldsymbol{r}'|^3} \mathrm{d}S' = -\frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + h\hat{\boldsymbol{z}}}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} \rho \, \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{\rho_S h \hat{\boldsymbol{z}}}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{\rho \, \mathrm{d}\rho}{(\rho^2 + h^2)^{3/2}} = -\frac{\rho_S \hat{\boldsymbol{z}}}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)$$

Steg 5: Därmed blir ytladdningstätheten

$$\boxed{\rho_S^{\text{plan}}(P) = -\rho_S \left(1 - \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right)}$$

b) Ytladdningstätheten ges av $\rho_S^{\text{plan}}(40a, 30a, 0) = \varepsilon_0 E_z(40a, 30a, 0)$. Avståndet från origo, $\sqrt{(40a)^2 + (30a)^2} = 50a$, är såpass stort att vi kan använda dipolapproximationen för att bestämma E_z. Denna ger

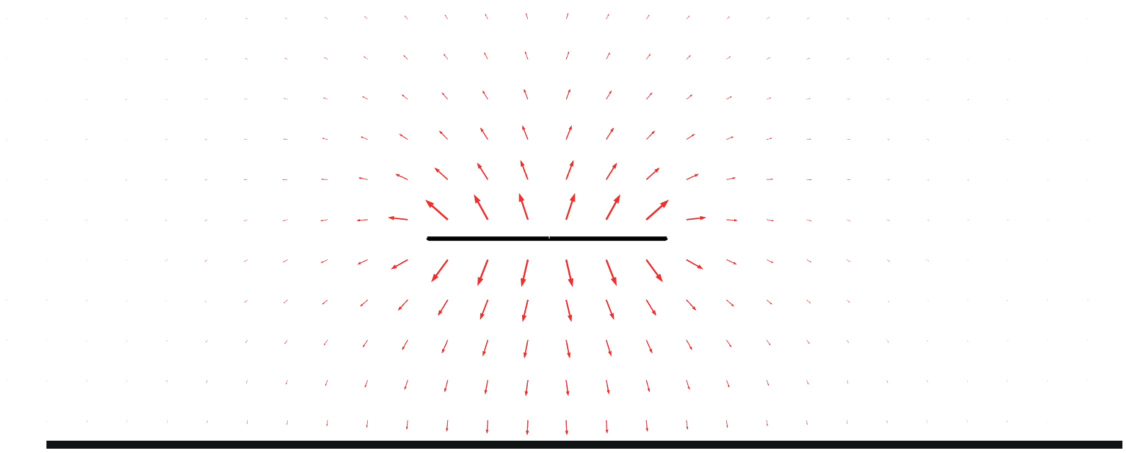
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\hat{\boldsymbol{r}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

där dipolmomentet är skivans laddning $Q = \rho_S \pi a^2$ gånger avståndet $2h$ mellan skivan och dess spegelladdning.

I punkten $(40a, 30a, 0)$ gäller $r = 50a$, $\theta = \pi/2$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{z}}$. Det ger

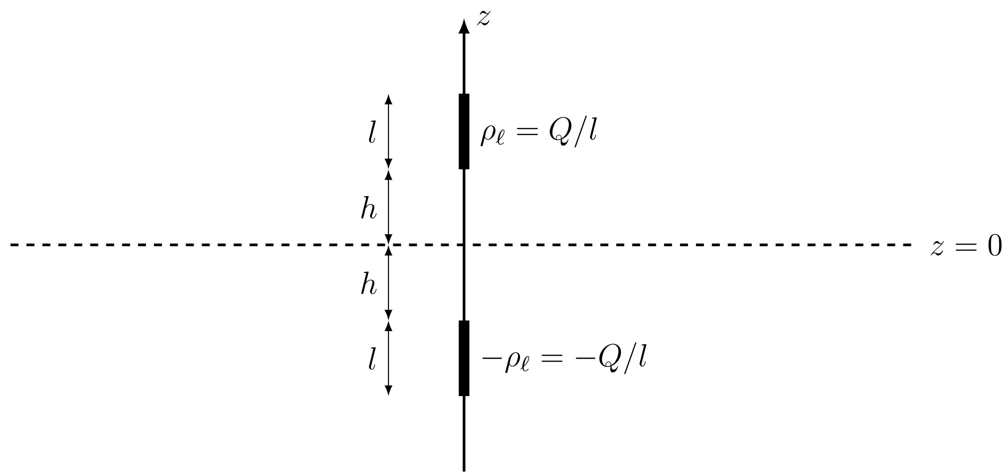
$$\boxed{\rho_S^{\text{plan}}(40a, 30a, 0) \approx -\frac{p}{4\pi(50a)^3}}$$

där $p = 2h\rho_S\pi a^2$.



Figuren visar en beräkning, gjord i Comsol, av det elektriska fältet.

Uppgift 2



Intuitivt verkar en vertikal kraft mellan nålen och och dess spegelbild i planet nedåt (negativ z-komponent). Problemet består av flera delproblem:

1. Spegla linjeladdningen i planet för att få rätt fältbild i området ovanför planet
2. Bestäm det elektriska fältet från spegelbilden av staven
3. Integrera upp kraften på staven från fältet från stavens spegelbild

Steg 2: Det elektriska fältet i en punkt $\boldsymbol{r} = z\hat{\boldsymbol{z}}$, $z > 0$, på den vertikal axeln från spegelbilden är (källpunkt $\boldsymbol{r}' = z'\hat{\boldsymbol{z}}$, linjeladdningstäthet $\rho_\ell = Q/l$, linjemått $\mathrm{d}\ell' = \mathrm{d}z'$)

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 l} \int_{\text{Spegelladdning}} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}\ell'$$

$$= -\frac{Q\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l}\int_{-l-h}^{-h} \frac{1}{(z-z')^2}\,\mathrm{d}z' = -\frac{Q\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l}\left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z+l+h}\right)$$

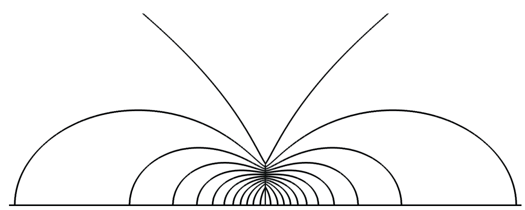
Steg 3: Den totala kraften $\boldsymbol{F}(h)$ på nålen blir således

$$\boldsymbol{F}(h) = \frac{Q}{l}\int_h^{l+h} \boldsymbol{E}(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{Q^2\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l^2}\int_h^{l+h}\left(\frac{1}{z+h} - \frac{1}{z+l+h}\right)\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{Q^2\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l^2}\left(\ln\frac{l+2h}{2h} - \ln\frac{2h+2l}{l+2h}\right) = -\frac{Q^2\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l^2}\ln\frac{(l+2h)^2}{2h(2h+2l)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F}(h) = -\frac{Q^2\hat{\boldsymbol{z}}}{4\pi\epsilon_0 l^2}\ln\left(1 + \frac{l^2}{4h(h+l)}\right)}$$

Kraften är attraktiv, som förväntat. Figuren nedan visar fältlinjerna då $h = l$ (Comsol).



Uppgift 3

a)

1. Sant. Vi kan påstå lite mer, nämligen att det elektriska fältet är överallt riktat radiellt utåt och beror endast av r, $\boldsymbol{E} = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$. Det innebär också att potentialen $V(r)$ endast beror av r. Vi kan kontrollera att $\boldsymbol{E}(r) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$ och $V(r)$ satisfierar alla randvillkor. Randvillkoren är: 1. Potentialen är konstant på varje metallyta. 2. Tangentialkomponenten av $\boldsymbol{E}$ är kontinuerlig i gränsytan mellan dielektrikumet och vakuum. 3. Normalkomponenten av $\boldsymbol{D}$ är kontinuerlig vid gränsytan mellan dielektrikumet och vakuum. Det är klart att 1 och 2 är uppfyllda. 3 är uppfylld pga av att normalkomponenten av $\boldsymbol{E}$ och därmed av $\boldsymbol{D}$ är noll vid gränsytan.

2. Falskt. $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ i vakuumdelarna och $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ i dielektrikumet.

3. Sant. Följer av analysen för 1.

4. Sant. Det yttersta skalet är jordat. Därmed är $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ utanför detta. Gauss lag säger då att totalladdningen för systemet är noll. Det mittersta skalet och dielektrikumet har noll totalladdning. Då måste det innersta och yttersta skalen ha samma laddning men med motsatt tecken.

5. Sant. $\boldsymbol{E}$ beror bara av r och då beror $\boldsymbol{D}$ endast av r mellan det mittersta och yttersta skalet. Ytladdningen på utsidan av mellanskalet är då konstant.

6. Falskt. $\boldsymbol{E}$ beror bara av r. Eftersom den fria ytladdningstätheten ges av $\rho_{\mathrm{S}} = \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}$ och $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}$ i vakuumdelen och $\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$ vid dielektrikat är den fria ytladdningstätheten ε_r gånger större vid dielektrikat än i vakuumdelen.

7. Falskt. På insidan är V konstant, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ och därmed $Q_{\text{in}} = 0$.

8. Sant. Det mellersta skalet är oladdat och då måste laddningarna ta ut varandra.

9. Falskt. $Q_{\text{ut}} = 0$ enligt 4.

b) Vi bestämmer först kapacitansen mellan två sfärer med konstant ε_r mellan sig. Därefter fås totala kapacitansen genom serie- och parallellkoplingar.

Antag två koncentriska sfäriska metallskal med radie a respektive $b > a$. Mellan sfärerna finns ett material med permittivitet ε_r. Låt nu den inre sfären ha laddningen Q och den yttre $-Q$. Sfärisk symmetri ger $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(r)$. Gauss lag ger då $\boldsymbol{D}(r) = \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ mellan skalen. Det ger $\boldsymbol{E}(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ mellan skalen. Spänningen mellan skalen är

$$V = \int_a^b \boldsymbol{E}(r) \cdot \hat{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Kapacitansen är därmed

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{ba}{b-a} \tag{1}$$

Vi kan se denna kondensator som två parallellkoppplade kondensatorer där var och en av dessa utgörs av två halvsfäriska skal. Kapacitansen för två parallellkopplade kondensatorer är summan av deras kapacitanser. Därmed är kapacitansen för en kondensator bestående av två halvsfäriska skal

$$C_{\text{halv}} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{ab}{b-a} \tag{2}$$

Totala kapacitansen C för vårt system ges av en seriekoppling av den yttre och inre kondensatorn $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\text{yttre}}} + \frac{1}{C_{\text{inre}}}$ där C_{yttre} är kapacitansen mellan $r = 2a$ och $r = 3a$ och C_{inre} är kapacitansen mellan $r = a$ och $r = 2a$. Vi utnyttjar att C_{inre} kan ses som två parallellkopplade kapacitanser. Enligt (1) och (2) gäller

$$C_{\text{yttre}} = 24\pi\varepsilon_0 a$$
$$C_{\text{inre}} = 4\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)a$$

Det ger

$$\boxed{C = \frac{24\pi a\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)}{7+\varepsilon_r}}$$

Uppgift 4

I samtliga deluppgifter använder vi Ampèrs lag på integralform på en ledare i taget. Vi kommer alltid att låta kurvan $\mathcal{C}$ vara en cirkel kring ledarens symmetriaxeln vilket ger

$$\boldsymbol{H}(r) = \frac{I_{\text{in}}}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

där I_{in} är strömmen som går genom $\mathcal{C}$. Riktningen på strömmen är här relaterade till $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ via skruvregeln. Totala magnetfältet ges som en superposition av de båda ledarnas magnetfält.

a) I origo gäller för båda ledarna att $r_c = a$ och $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{y}}$. Det ger

$$\boxed{\boldsymbol{H}(0,0,0) = \frac{I}{\pi a}\hat{\boldsymbol{y}}}$$

b) Den yttre ledaren ger inget magnetfält i det inre området. Den lilla ledaren ger

$$\boxed{\boldsymbol{H}(-a,0,0) = \frac{I}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{y}}}$$

c) Tricket är att se det vita området som en superposition av två likadana områden med strömtätheter $\boldsymbol{J} = \frac{I}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$ respektive $\boldsymbol{J} = -\frac{I}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$. Då är magnetfältet en summa av fältet från två cirkulära ledare med $\boldsymbol{J} = \frac{I}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$ respektive $\boldsymbol{J} = -\frac{I}{4\pi a^2}\hat{\boldsymbol{z}}$. I det vita området ges den vänstra cirkulära ledarens fält $\boldsymbol{H}_1$ och den högra cirkulära ledarens fält $\boldsymbol{H}_2$ av

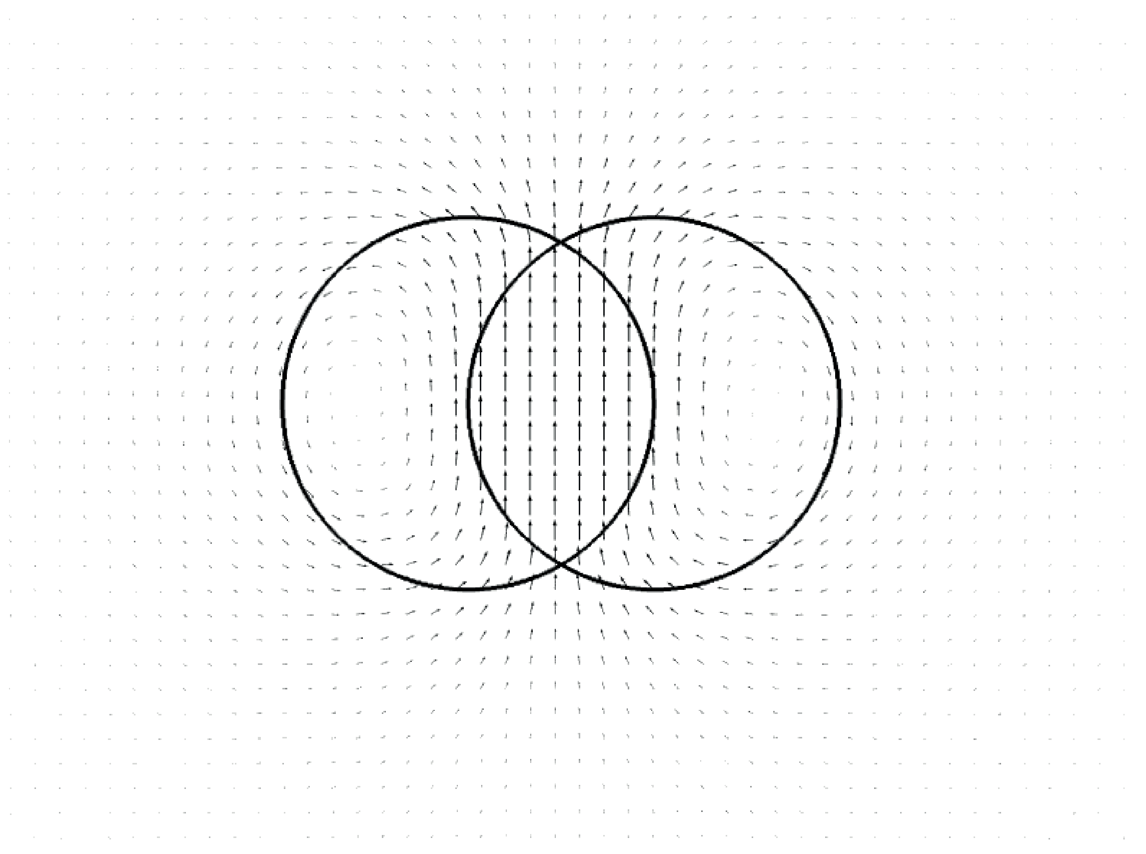
$$\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{J\pi r_1^2}{2\pi r_1}\hat{\boldsymbol{\phi}}_1$$
$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}) = -\frac{J\pi r_2^2}{2\pi r_2}\hat{\boldsymbol{\phi}}_2$$

där $J = \dfrac{I}{4\pi a^2}$ och

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \\
\hat{\boldsymbol{\phi}}_1 &= \frac{1}{r_1}\,(-y, x+a) \\
r_2 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \\
\hat{\boldsymbol{\phi}}_2 &= \frac{1}{r_2}\,(-y, x-a)
\end{aligned}$$

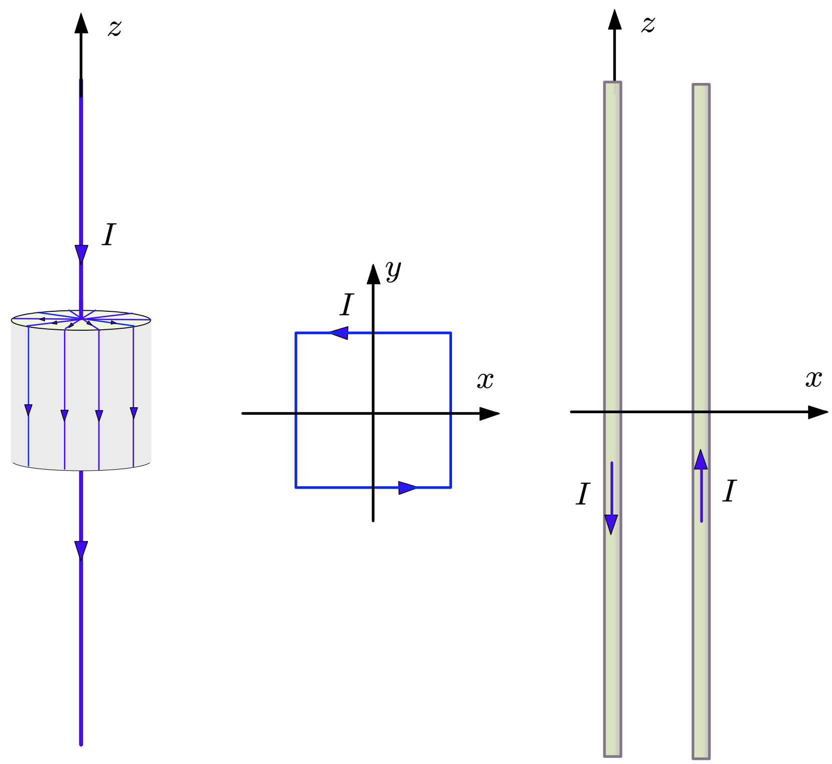
Det ger

$$\boxed{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}) = Ja\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{I}{4\pi a}\hat{\boldsymbol{y}}}$$



Figuren visar en beräkning av magnetfältet gjord i Comsol.

Uppgift 5



a) b) c)

a) Använd Ampères lag. Lägg $z-$axeln längs de raka ledarna och låt den peka uppåt. Problemet är axialsymmetriskt. Det ger $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = H(r_\mathrm{c})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ i varje plan z =konstant. Lägg en cirkel med radien r_c runt $z-$axeln. Ampères lag ger

$$B(r_\mathrm{c})2\pi r_\mathrm{c} = \mu_0 \cdot \text{ström genom cirkeln}$$

Strömmen genom cirkeln är noll om cirkeln är innanför cylindern och $-I$ om cirkeln är utanför. Det ger

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{innanför cylindern} \\ -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r_\mathrm{c}}\hat{\boldsymbol{\phi}} & \text{utanför cylindern} \end{cases}$$

b) Använd Biot-Savarts lag. Låt slingan ligga i planet $z = 0$ av symmetriskäl är flödestätheten riktad i positiv $z-$led. De fyra raka ledaren ger samma bidrag till $\boldsymbol{B}(\mathbf{0})$. För den undre ledaren fås

$$\boldsymbol{B}_1(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{0} - \boldsymbol{r}')}{r'^3}$$

Vi använder x' som parameter. Den går från $-a/2$ till $a/2$. Det gäller att

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' &= \hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{d}x' \\ \boldsymbol{r}' &= x'\hat{\boldsymbol{x}} - \frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{y}} \\ r' &= \sqrt{x'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \times \boldsymbol{r}' &= -\frac{a}{2}\hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned}$$

Det ger

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(x'^2 + (a/2)^2)^{1.5}} \, \mathrm{d}x' \hat{\boldsymbol{z}}$$

Integralen finns i formelsamlingen. Slutsvaret blir

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{0}) = 4\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{0}) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \hat{\boldsymbol{z}}$$

c) Använd Ampères lag. Vardera ledaren ger

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\mathrm{c}} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

där man lagt en $z-$axel längs ledarens symmetriaxeln och med $\hat{\boldsymbol{z}}$ i strömmens riktning. Lägger vi ett koordinatsystem enligt figur får vi

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 I}{10\pi a} \hat{\boldsymbol{y}}$$

i båda ledarna.

Uppgift 6

Problemet har sfärisk symmetri, vilket medför att $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, och $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$.

1. Gauss lag

$$\iint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = Q_\mathrm{enc.}/\varepsilon_0$$

används för en sfärisk yta S med radie r.

Det vänstra ledet blir ($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} = E(r)\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = E(r)$)

$$\iint\limits_S \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r)$$

och den inneslutna laddningen $Q_\mathrm{enc.}$ i det högra ledet beräknas utgående från rymdladdningstätheten $\rho(\boldsymbol{r})$. För $r < a$ integrerar vi upp den totalt inneslutna laddningen i klotet med radie r. Vi får

$$Q_\mathrm{enc.} = \iiint\limits_{|\boldsymbol{r}'| \leq r} \rho(\boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}v' = 4\pi \int_0^r \alpha r' \, r'^2 \, \mathrm{d}r' = \pi \alpha r^4$$

För $r > a$ integrerar vi endast upp till $r = a$ eftersom det utanför $r = a$ inte finns några laddningar. Vi får

$$Q_\mathrm{enc.} = \iiint\limits_{|\boldsymbol{r}'| \leq a} \rho(\boldsymbol{r}') \, \mathrm{d}v' = 4\pi \int_0^a \alpha r' \, r'^2 \, \mathrm{d}r' = \pi \alpha a^4$$

Sammanfattningsvis,

$$Q_\mathrm{enc.} = \begin{cases} \pi \alpha r^4, & r \leq a \\ \pi \alpha a^4, & r \geq a \end{cases}$$

Det elektriska fältet blir

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{Q_{\text{enc.}}\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha\hat{\boldsymbol{r}}}{4\epsilon_0}\begin{cases} r^2, & r \le a \\ a^4/r^2, & r \ge a \end{cases}$$

2. Poissons ekvation

$$\nabla^2 V = -\rho/\varepsilon_0$$

där laddningstätheten $\rho(\boldsymbol{r})$ är

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \alpha r, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

Potentialen kan p.g.a. den sfäriska symmetrin endast bero på radien r. Randvärdesproblemet blir

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{\alpha}{\epsilon_0}\begin{cases} r, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \\ V \text{ ändlig överallt} \\ V(r = a^-) = V(r = a^+) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^-} = \left.\dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^+} \\ V(r \to \infty) = 0 \text{ (jord)} \end{cases}$$

Lösningen är

(a) I området $r < a$ får vi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\alpha}{\epsilon_0}r^3$$

med allmän lösning

$$V(r) = -\frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0} - \frac{A}{r} + B$$

där A och B är konstanter.

(b) I området $r > a$ får vi en allmän lösning

$$V(r) = -\frac{C}{r} + D$$

där C och D är konstanter.

Randvillkoren ovan ger följande ekvationssystem

$$\begin{cases} A = 0 \\ -\dfrac{\alpha a^3}{12\epsilon_0} - \dfrac{A}{a} + B = -\dfrac{C}{a} + D \\ -\dfrac{\alpha a^2}{4\epsilon_0} + \dfrac{A}{a^2} = \dfrac{C}{a^2} \\ D = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{\alpha a^3}{3\epsilon_0} \\ C = -\dfrac{\alpha a^4}{4\epsilon_0} \\ D = 0 \end{cases}$$

Potentialen blir

$$V(r) = \frac{\alpha}{12\epsilon_0} \begin{cases} 4a^3 - r^3, & r \leq a \\ \\ 3a^4/r, & r \geq a \end{cases}$$

och det elektriska fältet

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla V(r) = \frac{\alpha\hat{\boldsymbol{r}}}{4\epsilon_0} \begin{cases} r^2, & r \leq a \\ a^4/r^2, & r \geq a \end{cases}$$