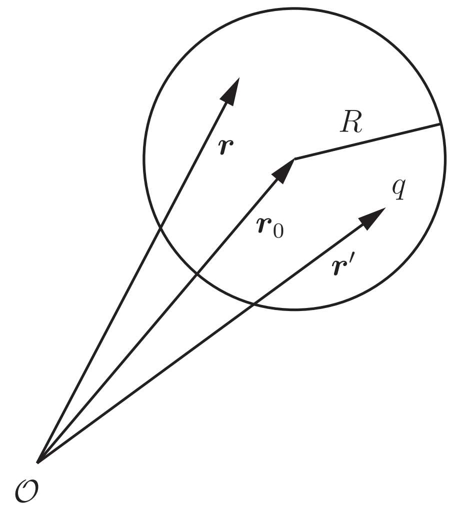
# Lösning till uppgift 3.47 i kursboken

**a)** Låt $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{r} : |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| \leq R\}$ vara ett klot med radien $R$ med centrumpunkt i $\boldsymbol{r}_0$. Vidare, låt $q$ vara en punktladdning i punkten $\boldsymbol{r}' \in \mathcal{V}$ (se figuren nedan).




Det elektriska fältet medelvärdesbildat över $\mathcal{V}$ ges av

$$\boldsymbol{E}_{\text{medel}} = \frac{1}{4\pi R^3/3}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}v = \frac{3}{4\pi R^3}\int_{\mathcal{V}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}v = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}v$$

där

$$\rho = -\frac{3q}{4\pi R^3}$$

Notera att detta uttryck är identiskt med det elektriska fältet $\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}')$ i punkten $\boldsymbol{r}' \in \mathcal{V}$ från ett homogent laddat klot med radien $R$ och centrumpunkt i $\boldsymbol{r}_0$ med rymdladdningstäthet $\rho$. Vi har således visat att

$$\boldsymbol{E}_{\text{medel}} = \boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}') = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|^3}\,\mathrm{d}v$$

**b)** Elektriska fältet $\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}')$ i punkten $\boldsymbol{r}' \in \mathcal{V}$ kan beräknas med Gauss lag. Sfärisk symmetri medför att

$$\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}') = |\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}')|\,\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|}$$

Gauss lag på integralform applicerat på en sfär med radien $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|$ och centrumpunkt i $\boldsymbol{r}_0$ ger att

$$|\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}')|\,4\pi|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^2 = \frac{4\pi|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|^3}{3}\rho/\varepsilon_0$$

eller ekvivalent,

$$|\boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}')| = \rho\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|}{3\varepsilon_0}$$

Således är

$$\boldsymbol{E}_{\text{medel}} = \boldsymbol{E}_{\text{klot}}(\boldsymbol{r}') = \rho\frac{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|}{3\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0|} = \rho\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0}{3\varepsilon_0} = -\frac{q}{4\pi R^3}\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_0}{\varepsilon_0}$$

**c)** Om det finns flera punktladdningar $q_i$ i punkterna $\boldsymbol{r}_i$ i området $\mathcal{V}$ (neutral laddningsfördelning, $\sum_i q_i = 0$) så måste vi enligt superpositionsprincipen summera över alla sådana:

$$\boldsymbol{E}_{\text{medel}} = -\frac{\sum_i q_i(\boldsymbol{r}_i' - \boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{\sum_i q_i \boldsymbol{r}_i'}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = -\frac{\boldsymbol{p}_{\text{tot}}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

där $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ betecknar totala dipolmomentet för alla punktladdningar i området $\mathcal{V}$. Vi kan ge avkall på att summan av alla laddningar är noll om vi låter $\boldsymbol{p}_{\text{tot}}$ vara laddningsfördelnings dipolmoment med avseende på sfärens centrum.

**d)** Vi lägger vårt koordinatsystem med origo i sfärens centrum och visar först påståendet för en ensam punktladdning i en punkt $\boldsymbol{r}$ utanför sfären. Det elektriska fältet i en punkt $\boldsymbol{r}_1$ ges då av

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}|^3}$$

Integrera nu $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)$ över sfären och dividera med sfärens volym $V$ för att få medelfältet:

$$\frac{1}{V}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}v_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V}\int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}|^3}\mathrm{d}v_1$$

Vi känner igen högerledet som fältet i punkten $\boldsymbol{r}$ från en homogent laddad sfär med laddningstätheten $\rho_0 = -\frac{q}{V}$. Fältet från en homogent laddad sfär är dock detsamma som från en punktladdning med samma totalladdning som sfären, dvs laddning $\rho_0 V = -q$. Det ger

$$\frac{1}{V}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{d}v_1 = -\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Högerledet är lika med fältet från $q$ uppmätt i origo![1]Vi har nu visat påståendet för en punktladdning. Byt punktladdningen mot en laddningstäthet $\rho(\boldsymbol{r})$ utanför sfäten. För varje volymselement $\Delta V$ av laddningstätheten gäller att medelvärdet av fältet över sfären är detsamma som fältet i centrum av sfären. Superposition ger påståendet.

[1] Fätet i origo från en punktladdning $q$ i punkten $\boldsymbol{r}$ ges av $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{0} - \boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{q\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$