

Föreläsning 6

5.3–5.4 i Griffiths

Magnetostatik (fortsättning)

Konsivering av magnetiskt flöde, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Kap. 5.3.2)

Från Biot-Savarts lag följer att

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$

Den magnetiska flödestätheten är alltså divergensfri, vilket är ekvivalent med att det inte finns några magnetiska punktladdningar.

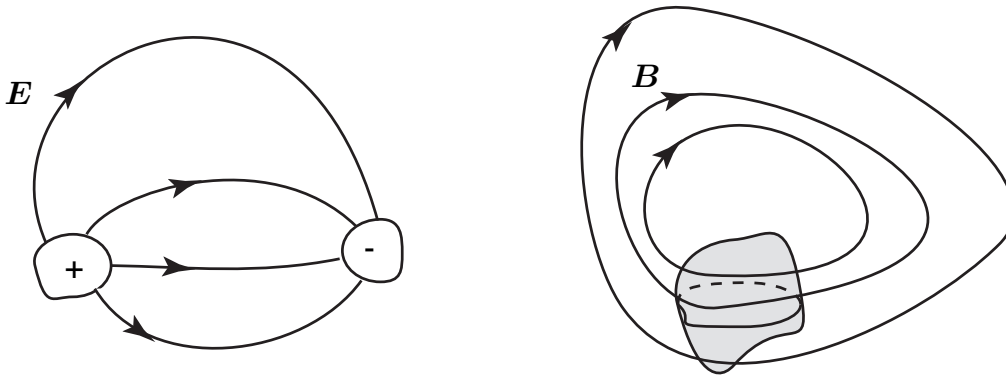
En konsekvens av detta samband är att det magnetiska flödet

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

är samma genom alla ytor S som har samma randkurva. Låt \mathcal{V} vara en volym som omsluts av ytan S med utåtriktad normal $\hat{\mathbf{n}}$. Eftersom $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ger Gauss sats att

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{B} \, dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = 0$$

Det betyder att det är lika mycket flöde in som ut genom en sluten yta S . Det betyder också att alla flödeslinjer bildar slutna banor, se figur.



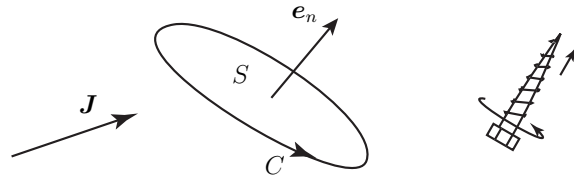
Figur: I elektrostatiken startar de elektriska fältlinjerna på positiva laddningar och slutar på negativa laddningar (vänstra figuren). Magnetiska flödeslinjerna bildar alltid slutna banor, eftersom det inte finns några magnetiska laddningar (högra figuren). Genom varje sluten yta går det in lika många magnetiska flödeslinjer som det går ut.

Ampères lag (Kap. 5.3.2)

Från Biot-Savarts lag följer också att

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (\star)$$

Det betyder att \mathbf{B} inte är ett konservativt fält.



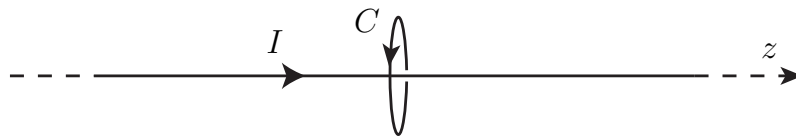
Låt C vara en sluten kurva i rummet som randkurva till ytan S . Omloppsriktningen för C och normalen till S är relaterade via skruvregeln, se figur. Ampères lag ger

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \cdot \text{ström genom } S$$

Genom att använda Stokes sats (se vektoranalysen) får vi Ampères lag på integralform

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \cdot \text{strömmen genom } S \quad (\star\star)$$

Exempel: \mathbf{B} från en lång rak ledare med ström I . Lägg z -axeln längs ledaren, se figur. Av symmetriskäl gäller $\mathbf{B} = B(r_c) \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Låt C vara en cirkulär slinga koncentriskt kring z -axeln. Då fås



$$\oint_C \mathbf{B}(r_c) \cdot d\boldsymbol{\ell} = B(r_c) 2\pi r_c$$

Alltså ger ekv. ($\star\star$)

$$\mathbf{B}(r_c) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Vektorpotentialen \mathbf{A}

Vi inför vektorpotentialen \mathbf{A} genom

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

Insättning i ekvationen (*) ger

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

genom att använda identiteten

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

Vektorpotentialen är inte entydigt given och man kan välja \mathbf{A} så att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, vilket medför

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

I vissa fall är denna ekvation mycket användbar för att bestämma det magnetiska fältet från en strömtäthet.

Multipolutveckling (Kap. 5.4.3) (kursivt)

I elektrostatiken såg vi att fältet och potentialen från en laddningsfördelning kunde skrivas som en serie av multipoler. Detsamma gäller för den magnetiska flödestätheten och vektorpotentialen från en strömslinga.

Vektorpotentialen från en sluten strömslinga kan på stora avstånd utvecklas i en serie av multipoler

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I d\boldsymbol{\ell}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \oint_C r'^l P_l(\cos \Theta') d\boldsymbol{\ell}'$$

där $\cos \Theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$. Termerna i summan benämns

$l = 0$, **monopol**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})_{\text{mono}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_C d\boldsymbol{\ell}' = \mathbf{0}$$

$l = 1$, **dipol**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_C r' P_1(\cos \Theta') d\boldsymbol{\ell}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \oint_C \mathbf{r}' d\boldsymbol{\ell}' \quad (0.1)$$

$l = 2$, **kvadrupol**

$l = 3$, **oktopol**

Magnetisk dipol (Kap. 5.4.3)

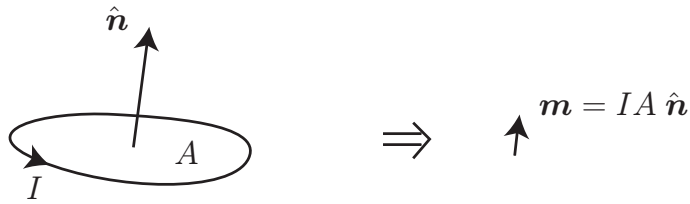
Dipolbidraget kan skrivas om (se bilaga i slutet)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (0.2)$$

där det magnetiska dipolmomentet \mathbf{m} definieras genom

$$\mathbf{m} = I \int_S \hat{\mathbf{n}} dS.$$

För en plan slinga gäller $\mathbf{m} = IA\hat{\mathbf{n}}$.

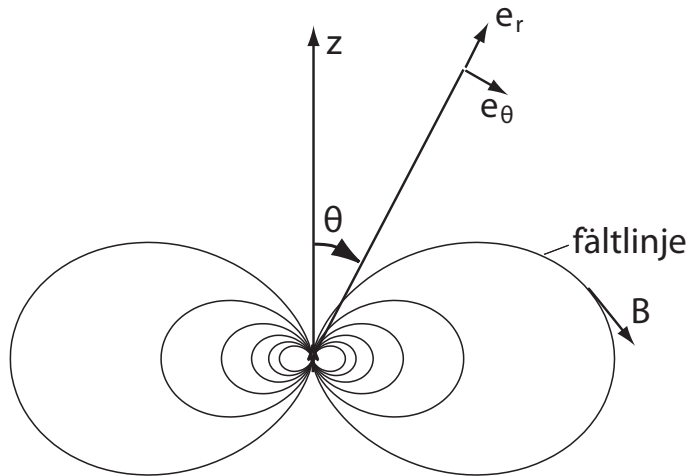


B från magnetisk dipol

Antag att slingan placeras i origo med $\hat{n} = \hat{z}$, se figur. Långt bort från slingan är den magnetiska flödestätheten approximativt lika med det magnetiska dipolfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\hat{r} \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) \quad (**)$$

Notera att detta, så när som på en konstant, är samma uttryck som elektriska fältet från en elektrisk dipol.



Kommentar: Fältet i ekvation (**) gäller exakt för en matematisk dipol, vilket är en cirkulär slinga med ström $I \rightarrow \infty$ och radie $a \rightarrow 0$ så att $IA = I\pi a^2 = m$.

Bilaga: Härledning av ekvation (0.2) (kursivt)

Vi delar upp vektorpotentialen i dess kartesiska komponenter: $\mathbf{A}_{\text{dip}} = (A_x, A_y, A_z)$ där enligt (0.1) x -komponenten ges av

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{\mathcal{C}} (\hat{r} \cdot \mathbf{r}') \hat{x} \cdot d\ell'$$

Högerledet skrivs om med Stokes sats:

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S \nabla' \times (\hat{x}(\hat{r} \cdot \mathbf{r}')) \cdot \hat{n} dS'$$

där S är ytan som spänns upp av kurvan \mathcal{C} och \hat{n} är riktad enligt skruvregeln.

Räkningregler för ∇ operatoren ger

$$\nabla' \times (\hat{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')) = \nabla'(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{x}}$$

Därmed gäller

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot \hat{\mathbf{x}} \, dS'$$

A_y och A_z fås analogt. Det ger ekvation (0.2) ty

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{r}}) \, dS' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$