Föreläsning 5

Motsvarar avsnitten 5.1–5.2, 8.1.1 i Griffiths

Strömmar (Kap. 5.1.3)

Laddningstransport kan ske på flera sätt. Några är:

1. Ledningselektroner (eller hål) i metaller eller halvledare (små hastigheter $\sim 10^{-4}$ m/s, stora mängder)

2. Strömmar i elektrolyter som följd av jontransport i vätskor

3. Strömmar av elektroner eller joner i vakuum eller uttunnade gaser (t.ex. partikelacceleratorer) (stora hastigheter)

I samtliga fall definieras **strömtätheten $\boldsymbol{J}$** som

$$\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{v}$$

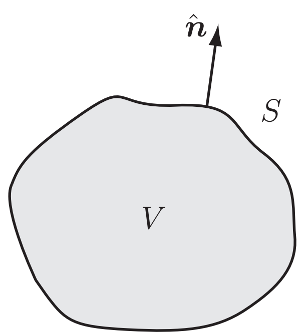
där N är antalet laddningsbärare per volymsenhet, q laddningsbärarnas laddning och $\boldsymbol{v}$ deras hastighet. Strömtätheten $\boldsymbol{J}$ har enheten laddning per ytenhet per tidsenhet (C/m^{2}s eller A/m^2).
Strömmen I genom en yta S (ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$) är flödet av $\boldsymbol{J}$ genom S.

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

Enheten är Ampere A.

Kontinuitetsekvationen (laddningens bevarande)

(Detta avsnitt tas upp igen i kapitel 7. Det kan nu läsas kursivt.)



Strömmen ut ur den slutna ytan S:

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

I är den laddning som försvinner **ut ur** V per tidsenhet. Total laddning i V är

$$Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Laddningens bevarande (experimentellt faktum):

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

eller med divergenssatsen

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}v = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \mathrm{d}v$$

V godtycklig ger kontinuitetsekvationen

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Stationära strömmar (inga strömkällor):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Exempel: Kirchhoffs stömlag

$$\sum_k i_k = 0$$

Magnetostatik (Kap. 5)

En viktig skillnad mot elstatiken är att det inte finns några magnetiska punktladdningar (det går inte att isolera polerna i en magnet). I magnetostatik gäller att stationära strömmar, $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, råder.

Kraftverkan mellan laddningar i rörelse (Kap. 5.1.2)

Magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$

Kraften $\boldsymbol{F}$ på en testladdning q med hastighet $\boldsymbol{v}$ ges av Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{q\boldsymbol{E}}_{\text{el.-statik}} + \underbrace{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}_{\text{magnetiskt}}$$

1. $\boldsymbol{E}$ elektriskt fält (enhet V/m)
2. $\boldsymbol{B}$ magnetisk flödestäthet (enhet T=As/m^2=Wb/m^2)

Kraften $(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \perp \boldsymbol{v}$, vilket medför att kraften inte utför något arbete $\int \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$.

Exempel: En magnetisk flödestäthet med styrkan 1 Tesla är mycket stark. De allra starkaste permanentmagneterna (t.ex. Neodymmagneter) ger en Tesla. På vår breddgrad är det jordmagnetiska fältet ungefär 57 μT. Vid magnetresonanstomografi används magnetfält med styrkan 3-7 T. I acceleratorn Large Hadron Collider på Cern används mycket starka supraledande elektromagneter för att få de högenergetiska protonerna att gå längs den 27 km långa cirkulära acceleratorn. Dessa magneter ger fältstyrkan 8 T. Man har nu rapporterat om en ny typ av elektromagnet som ger 13.5 T. Byter man till dessa magneter kan energin på protonerna ökas ytterligare.

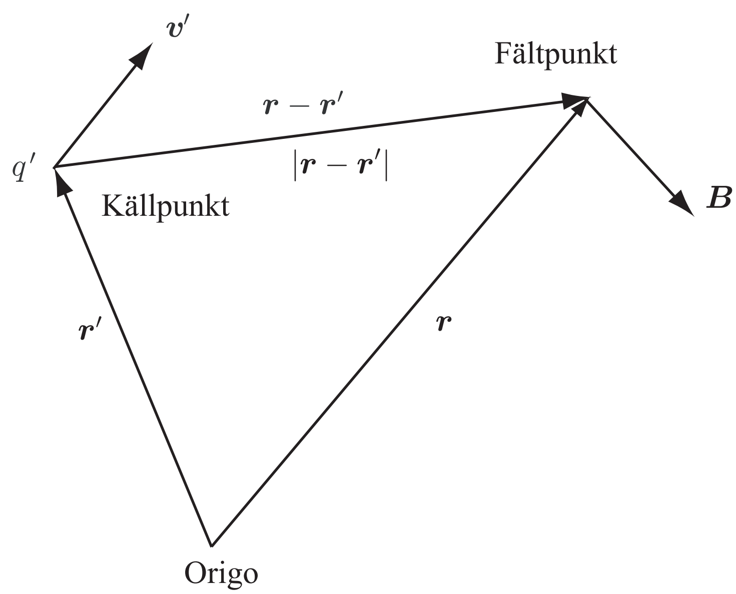
Biot-Savarts lag (Kap. 5.2.2)

Den statiska magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ genereras av laddningar i rörelse.

Experimentellt faktum

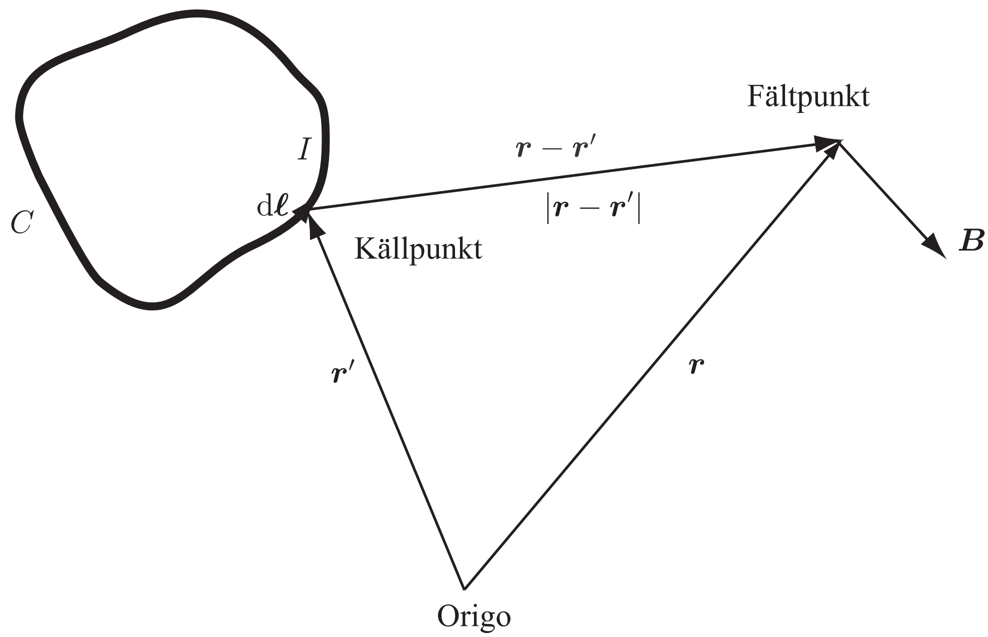
En laddning q' i punkten $\boldsymbol{r}'$ med hastigheten $\boldsymbol{v}'$ genererar den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ i punkten $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$



Urspunget till detta experimentella faktum kommer från följande integralsamband mellan en ström I i en ledning C och magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ kring ledningen:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I d\boldsymbol{\ell}' \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \quad \text{(Biot-Savarts lag)}$$



Detta är ett postulat med ursprung i experiment den danske fysikern Hans Christian Ørstedt gjorde 1820 på magnetfält från strömmar i ledningar.

Konstanten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$Vs/Am (exakt värde) är vakuums permeabilitet och sambandet

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} 299792458 \text{ m/s} \,(\text{exakt})$$

gäller där c_0 är ljushastigheten i vakuum.

Biot-Savarts lag kan generaliseras till ett samband mellan $\boldsymbol{B}$ och strömtätheten $\boldsymbol{J}$ i en volym $\mathcal{V}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

Jämför med Coulombs lag

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

För en ytströmtäthet som befinner sig på en yta $\mathcal{S}$ gäller på samma sätt:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{S} \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dS'$$