

Föreläsning 4

Motsvarar avsnitten 4.1–4.4.

Kraftvekan på dipoler (Kap. 4.1.3)

1. **Vridmoment** \mathbf{N} på elektrisk elementardipol \mathbf{p} :

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

\mathbf{p} vill "ställa in sig" i \mathbf{E} :s riktning.

Exempel på elektriska dipoler: H₂O-molekyler (polära vätskor)

2. **Kraft** \mathbf{F} på elektrisk elementardipol \mathbf{p} i inhomogent fält $\mathbf{E}(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Elektriska fält i material (Kap. 4)

Två ideala material behandlas:

1. **Ledare** (metaller) kännetecknas av fria, lätt rörliga laddningsbärare
2. **Isolatorer** (dielektrika) saknar fria, lätt rörliga laddningsbärare

Modell av isolatormaterial (Kap. 4.2)

Vårt mål blir att modellera effekterna på det elektriska fältet av ett isolatormaterial bestående av elektriskt neutrala atomer (molekyler). Vi använder en modell där varje atom bidrar med ett dipolfält $V(\mathbf{r})_{\text{dip}}$ till den totala potentialen $V(\mathbf{r})$ i mätpunkten, som vi antar ligger utanför materialet i vakuum. Totala potentialen från alla dipolbidrag från materialets atomer (elektriskt dipolmoment \mathbf{p}_i i punkten \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, n$) blir

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

där **polarisationen** \mathbf{P} betecknar den elektriska dipolmomenttätheten (totalt elektriskt dipolmoment per volymsenhet). Totala elektriska dipolmomentet i en volym med polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ är då

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P}(\mathbf{r}) dv$$

Omskrivning med divergenssatsen ger

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

och vi identifierar två (ekvivalenta) laddningsfördelningar

1. **Ytladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{ps}} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

2. **Rymdladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{\text{p}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

Det betyder att potentialen från polarisationen \mathbf{P} är densamma som potentialen från den ekvivalenta rymd- och ytladdningen.

Kommentar: Griffiths betecknar de bundna polarisationsyt-laddningen med σ_b .

Elektrisk flödestäthet \mathbf{D} (Electric displacement) (Kap. 4.3)

Det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ genereras av alla laddningar, oavsett om de är fria eller är bundna till atomer och molekyler. Polarisationen $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ är dipolmoment per volymenhet och är, via punkterna 1 och 2 ovan, relaterad till de laddningar som är bundna. Vi inför nu den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. Denna är relaterad till alla fria laddningar, dvs. laddningar som inte är bundna till atomer eller molekyler. Vi kommer strax att eliminera \mathbf{P} och enbart använda $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ och $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ när vi bestämmer elektriska fält och potentialer.

Den totala laddningstätheten är en summa av laddningstätheten av fria laddningar ρ_{f} och den bundna laddningstätheten ρ_{p} .

$$\rho = \rho_{\text{f}} + \rho_{\text{p}}$$

Som vi sett tidigare relaterar Gauss lag den totala laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ till det elektriska fältet. Polarisationen ger upphov till en ekvivalent bunden rymdladdningstäthet via relationen $\rho_{\text{p}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Gauss lag kan då skrivas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 = (\rho_{\text{f}} + \rho_{\text{p}})/\varepsilon_0 = (\rho_{\text{f}} - \nabla \cdot \mathbf{P})/\varepsilon_0$$

Vi skriver detta som

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{\text{f}}$$

Vi definierar den elektriska flödestätheten \mathbf{D} genom

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Divergensen av \mathbf{D} ger en ny form av Gauss lag

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{f}}}$$

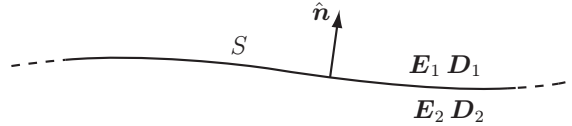
Integralformulering av Gauss lag

$$\boxed{\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_{\text{f}}}$$

där Q_{f} är den totalt inneslutna fria laddningen i S .

Randvillkor för \mathbf{E} och \mathbf{D}

Låt S vara skiljeytan mellan två områden med olika material. På ytan S kan det finnas en (fri) ytladdningstäthet ρ_S . Då gäller följande randvillkor för \mathbf{E} och \mathbf{D} :



Tangentialkomponenten av \mathbf{E} är alltid kontinuerlig över S , dvs

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{n} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

(i formelsamlingen skrivs att E_t är kontinuerlig). Normalkomponenten av \mathbf{D} satisfierar

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}_1(\mathbf{r}) - \hat{n} \cdot \mathbf{D}_2(\mathbf{r}) = \rho_S(\mathbf{r}) \quad (\text{fri ytladdningstäthet})$$

För ett material utan fri ytladdningstäthet gäller att normalkomponenten av flödestätheten \mathbf{D} är kontinuerlig över S .

Randvillkor vid ytor till ledare

I en ledande kropp som inte är kopplad till några spänningskällor är det elektriska fältet noll överallt. Därmed är också potentialen konstant i en ledande kropp.

Om den ledande kroppen begränsas av ytan S så gäller på ytan att

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$$

$$\hat{n} \cdot \mathbf{D}_1 = \rho_S$$

Linjära dielektrikum (Kap. 4.4)

Ett dielektrikum är ett material där polarisationen \mathbf{P} induceras av ett elektriskt fält. Om det pålagda fältet inte är extremt starkt är materialet linjärt (det finns undantag). Då gäller att polarisationen är proportionell mot det pålagda elektriska fältet

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

där χ_e är en dimensionslös materialkonstant som kallas den *elektriska susceptibiliteten*. Konstanten talar om hur mycket materialet polariseras. Mellan elektriska flödestätheten \mathbf{D} och polarisationen \mathbf{P} råder följande samband:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

där $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ = den relativa permittiviteten, och $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ = den absoluta permittiviteten.

Exempel: Vattenmolekylen har ett permanent dipolmoment och den kan lätt ställa in sig i det elektriska fältets riktning. Därför är susceptibiliteten för vatten mycket stor $\chi_e = 80$. Fasta material brukar ha betydligt mindre värden på susceptibiliteten.

Elektrostatisk energi (Kap. 4.4.3)

För laddningar i vakuum gäller sedan tidigare:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \, dv$$

Uttrycket modifieras av polarisationen till

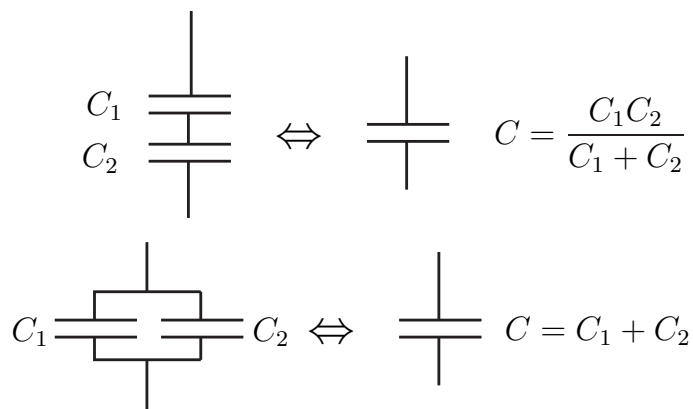
$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \, dv$$

Kondensatorer. Serie- och parallellkoppling

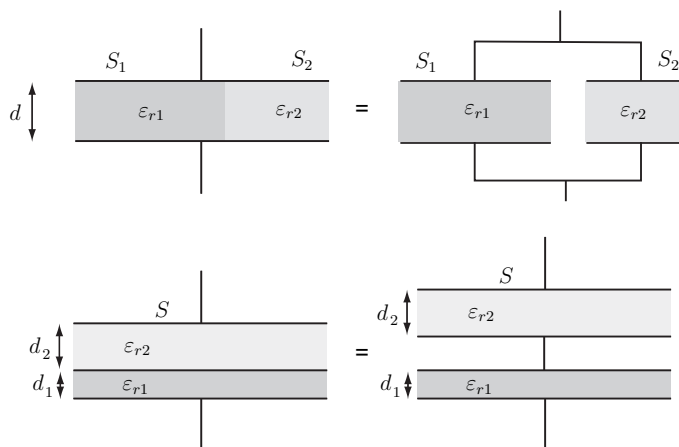
Vi har tidigare stött på plattkondensatorn. Den består av två parallella metallskivor med area A . Avståndet mellan plattorna betecknas d . Om vi fyller området mellan plattorna med ett dielektrikum med relativa permittiviteten ϵ_r ökar kondensatorns kapacitans. Den ges av

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

Genom serie- och parallellkoppling kan vi på ett enkelt sätt få fram kapacitansen för en kondensator där utrymmet mellan plattorna är fyllt med flera olika dielektrikum.



Exempel: Ekvivalenta kondensatorer



Repetitionsfrågor

1. Vad är skillnaden mellan fria laddningar och bundna laddningar?
2. Hur påverkas fria laddningar av ett elektriskt fält?
3. Hur påverkas bundna laddningar av ett elektriskt fält?
4. Vad är ett dielektriskt material?
5. Antag att vi lägger in en bit dielektriskt material med konstant permittivitet ϵ_r i ett elektriskt fält.
 - a) Kan det då bli en rymdladdningstäthet $\rho(\mathbf{r})$ i biten?
 - b) Kan det bli en ytladdningstäthet $\rho_s(\mathbf{r})$ på bitens yta?

Svar: 5a Nej. 5b) Ja.