Föreläsning 11

9.1-9.2.2 i Griffiths

Vågekvationen

Från Maxwells ekvationer

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{Faradays lag} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \quad \text{Ampères (generaliserade) lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f \quad \text{Gauss lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{Flödeskonservering} \end{cases}$$

är det ganska rättframt att härleda vågekvationer för de elektriska och magnetiska fälten. Antag linjära, isotropa, homogena (μ, ε konstanta) material, d.v.s.

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Vi får m.h.a. Maxwells ekvationer

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E})}_{\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}} = -\nabla \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \boldsymbol{H} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\Big(\boldsymbol{J}_f + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}}_{\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}\Big)$$

vilket i sin tur ger

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t}$$

d.v.s. den tredimensionella vågekvationen med en källterm $\nabla \rho_f / \varepsilon + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t}$. Varje kartesisk komponent uppfyller den endimensionella vågekvationen.

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = \text{källterm}$$

där $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$=våghastigheten. I vakuum är våghastigheten exakt given av $c_0 = 299792458$ m/s.

På samma sätt härleds den tredimensionella vågekvationen för det magnetiska fältet $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$. Resultatet är

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_f + \mu \frac{\partial \boldsymbol{J}_f}{\partial t} \\ \nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} &= -\nabla \times \boldsymbol{J}_f \end{aligned}}$$

Fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ skapas i något område där det finns laddningar och strömmar, t.ex. i en antenn. Fälten färdas ut från området som elektromagnetiska vågor. Fälten för dessa vågor måste uppfylla ekvationerna ovan.

I källfritt vakuum gäller de homogena vågekvationerna

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \boldsymbol{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} &= \boldsymbol{0} \\ \nabla^2 \boldsymbol{H} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}} \tag{0.1}$$

Planvågslösningar och deras egenskaper

Lösningar till vågekvationerna (0.2) som bara beror av z och t, d.v.s. $\boldsymbol{E}(z,t)$ och $\boldsymbol{H}(z,t)$, kallas plana vågor eftersom de för en fix tid är konstanta vektorer i varje plan z = konstant. På stora avstånd från en källa är planvågsapproximationen ofta relevant och den förenklar både analysen och den fysikaliska tolkningen. Av dessa anledningar används den flitigt inom optik och mikrovågsteknik. Här följer tre viktiga egenskaper för plana vågor i vakuum:

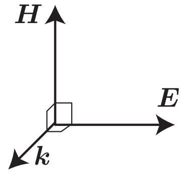
1. Plana vågor är transversella, $E_z(z,t) = 0$ och $H_z(z,t) = 0$.

2. Två typer: $\boldsymbol{E}^+(z - ct)$ som rör sig i positiv $z-$led och $\boldsymbol{E}^-(z + ct)$ som rör sig i negativ $z-$led

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(z,t) &= \boldsymbol{E}^+(z - ct) + \boldsymbol{E}^-(z + ct) \\ \boldsymbol{H}(z,t) &= \boldsymbol{H}^+(z - ct) + \boldsymbol{H}^-(z + ct) \end{aligned}$$

3. Regeln om högersystem: Låt $\hat{\boldsymbol{k}}$ vara planvågens utbredningsriktning. Då bildar $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\hat{\boldsymbol{k}}$ ett ortogonalt högersystem där

$$\begin{aligned} \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{H}|} &= \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\,\Omega = \text{vågimpedansen för vakuum} \\ \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{B}|} &= c_0 = \text{ljushastigheten i vakuum} \end{aligned}$$



En planvåg med utbredningsriktning $\hat{\boldsymbol{k}}$, där $\hat{\boldsymbol{k}}$ är en enhetsvektor, kan skrivas

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} - c_0 t) \\ &\boldsymbol{H}(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} - c_0 t) = \eta_0^{-1} \hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{r} - c_0 t) \end{aligned}$$

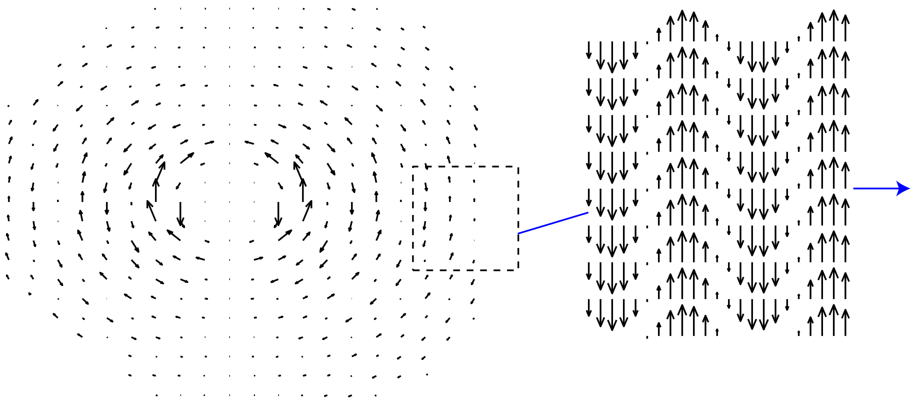
Tidsharmoniska plana vågor

En tidsharmonisk planvåg varierar sinusformat i både rum och tid, med konstant frekvens. Nästan all trådlös kommunikation sker med hjälp av bärvågor som är tidsharmoniska. Även inom optiken är tidsharmoniska vågor vanliga. En laser ger t.ex. ifrån sig ljus med en bestämd frekvens och detta ljus är då tidsharmoniskt. En tidsharmonisk planvåg som rör sig i positiv $z-$led kan skrivas

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \sin(kz - \omega t + \alpha_0)\hat{\boldsymbol{x}} + E_1 \sin(kz - \omega t + \alpha_1)\hat{\boldsymbol{y}} \\
&\boldsymbol{H}(z,t) = \eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{E}(z,t) = \eta_0^{-1}\left(E_0 \sin(kz - \omega t + \alpha_0)\hat{\boldsymbol{y}} - E_1 \sin(kz - \omega t + \alpha_1)\hat{\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned}$$

Här är $\omega = 2\pi f$ =vinkelfrekvensen, f =frekvensen, $k = \dfrac{\omega}{c_0} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ =vågtalet, $\lambda = \dfrac{c_0}{f}$ =våglängden, α_0 =fasvinkel och α_1 =fasvinkel.

Kommentar: Fälten $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ skapas i något område där det finns laddningar och strömmar som varierar tidsharmoniskt, t.ex. i en antenn. Fälten färdas ut från området som tidsharmoniska elektromagnetiska vågor som måste uppfylla vågekvationerna. Långt bort från området är vågen sfärisk, d.v.s. vågen rör sig med ljushastigheten radiellt ut från antennen. Vi kommer att behandla sfäriska vågor i antennavsnittet senare i kursen. Lokalt kan vågen ofta approximeras med en planvåg, se figur, vilket är en fördel eftersom planvågor är enklare att analysera än sfäriska vågor.



Figur: Den vänstra figuren visar det elektriska vektorfältet för det spridda ljuset från en liten partikel (tex molekyl). Fältet är en sfärisk våg som färdas med ljusets hastighet radiellt ut från partikeln. I den markerade rektangeln är vågfronten nästan plan och fältet kan approximeras med planvågen som visas i den högra figuren

Polarisation av plana vågor (Kap. 9.1.4)

Ett tidsharmoniskt vektorfält, t.ex. $\boldsymbol{E}$, har följande egenskaper:

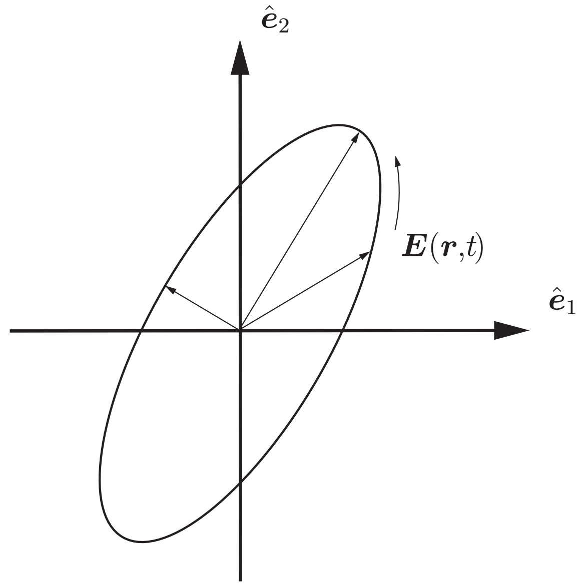
1. $\boldsymbol{E}$-fältet svänger i ett plan (polarisationsplanet)

2. $\boldsymbol{E}$-fältet beskriver en elliptisk bana i polarisationsplanet.
   Exempel: Cirkulärpolariserade vågor, vars polarisation ändras med tiden. Kan beskrivas som två vinkelräta och fasförskjutna delvågor/komposanter, som byter plats med varandra:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$

   Alternativt,

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} - E_0 \sin(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{y}}$$



3. Rörelsen kan vara moturs (medurs) beroende på teckenskillnaden mellan komposanterna, och vågen kallas då höger-(vänster-)elliptiskt polariserad

Lösning av vågekvationen (kursivt)

På föreläsning 13, som handlar om antenner, behöver vi använda lösningen till den skalära vågekvationen för att kunna konstruera de tidsberoende elektromagnetiska fälten från en antenn. För fullständighetens skull visar vi här hur man får fram lösningen i det skalära fallet. Tentamen kommer inte att innehålla uppgifter där det krävs att man förstår härledningen. Man förväntas dock förstå slutsatserna av denna härledning, den inringade relationen i slutet, och att lösningen är kausal, d.v.s. att det tar en tid $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c$ för en signal att färdas sträckan $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

Vi skall nu studera lösningarna $V = V(\boldsymbol{r}, t)$ till vågekvationen

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} = -\rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{0.2}$$

Detta är samma ekvation som dyker upp i akustiken. Enda skillnaden är att våghastigheten är betydligt lägre för akustiska vågor än för elektromagnetiska vågorna. Låt källtermen först vara en "punktladdning" i origo, d.v.s.

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r}) q(t)$$

Denna deltafunktion skall hjälpa oss få fram lösningen till (0.2).

Vi söker sfäriskt symmetriska lösningar $V = V(r,t)$. I sfäriska koordinater får vi vågekvationen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r,t)}{\partial r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2} = -\delta(\boldsymbol{r})q(t) \qquad (\star)$$

En lösning till den källfria ekvationen är

$$V(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r}, \quad r > 0$$

där f är en godtycklig (snäll) funktion. [1] Funktionen f bestäms av funktionen $q(t)$ i origo. Resultatet är

$$f(\xi) = \frac{q(-\xi/c)}{4\pi}$$

Bevis Vi visar detta resultat, men beviset kan hoppas över för den som inte är intresserad. Integrera båda sidor i ($\star$) över ett klot centrerat i origo med radie ϵ.

$$\iiint_{r\le\epsilon} \nabla^2 V(r,t)\ \mathrm{d}v - \frac{1}{c^2}\iiint_{r\le\epsilon}\frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2}\ \mathrm{d}v = -\iiint_{r\le\epsilon}\delta(\boldsymbol{r})q(t)\ \mathrm{d}v = -q(t) \quad (\dagger)$$

De olika termerna i vänster led blir:

$$\iiint_{r\le\epsilon}\frac{\partial^2 V(r,t)}{\partial t^2}\ \mathrm{d}v = 4\pi\int_0^\epsilon \frac{c^2 f''(r-ct)}{r}r^2\ \mathrm{d}r \to 0, \quad \epsilon \to 0$$

och med divergenssatsens hjälp

$$\begin{aligned}\iiint_{r\le\epsilon}\underbrace{\nabla^2 V(r,t)}_{\nabla\cdot(\nabla V)}\ \mathrm{d}v = \iint_{r=\epsilon}\nabla V\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\ \mathrm{d}S = 4\pi\epsilon^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r-ct)}{r}\bigg|_{r=\epsilon}\\ = 4\pi\epsilon^2\left(\frac{f'(\epsilon-ct)}{\epsilon} - \frac{f(\epsilon-ct)}{\epsilon^2}\right) \to -4\pi f(-ct), \quad \epsilon\to 0\end{aligned}$$

---

[1]Vi kontrollerar detta genom att beräkna de partiella derivatorna m.a.p r och t.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{f(r-ct)}{r} = \dfrac{f'(r-ct)}{r} - \dfrac{f(r-ct)}{r^2}\\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{f(r-ct)}{r}\right) = \dfrac{\partial(rf'(r-ct))}{\partial r} - \dfrac{\partial f(r-ct)}{\partial r} = rf''(r-ct)\\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\dfrac{f(r-ct)}{r} = c^2\dfrac{f''(r-ct)}{r}\end{cases}$$

vilket ger

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\frac{f(r-ct)}{r}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{f(r-ct)}{r} = \frac{f''(r-ct)}{r} - \frac{1}{c^2}c^2\frac{f''(r-ct)}{r} = 0$$

Resultatet från (†) blir i gränsen $\epsilon \to 0$:

$$4\pi f(-ct) = q(t)$$

vilket visar det önskade resultatet. □

Lösningen till vågekvationen ($\star$) blir därför

$$V(r,t) = \frac{f(r-ct)}{r} = \frac{q(t-r/c)}{4\pi r}$$

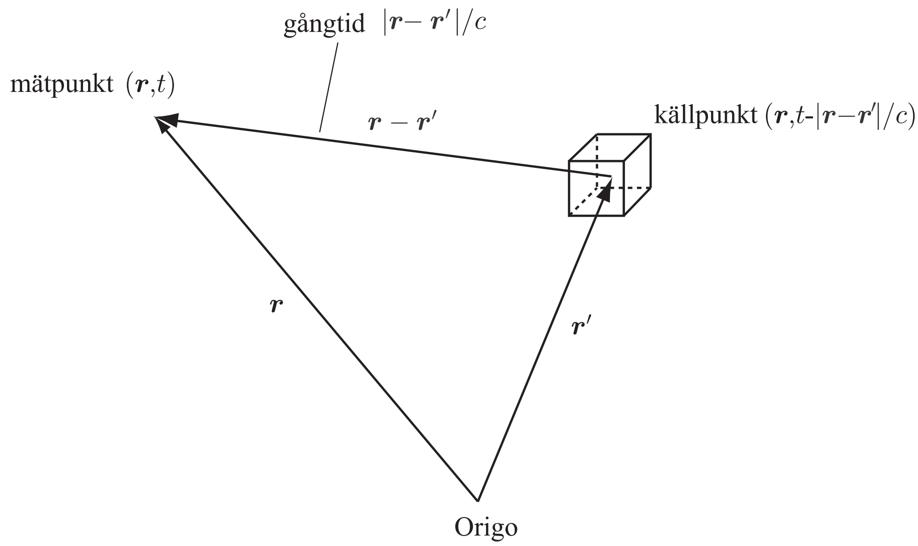
Lösning för translaterad "punktladdning" $r \to |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

$$V(r,t) = \frac{q(t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Totalt från hela laddningsfördelningen $\rho(\boldsymbol{r},t)$ fås genom att integrera över alla källor, d.v.s.

$$\boxed{V(r,t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c)}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}v'}$$

Fysikalisk tolkning:



Tidsargumentet i integralen är tidsförskjutet med gångtiden mellan käll- och mätpunkt.

Jämförelse med det elektrostatiska fallet

$$\nabla^2 V(\boldsymbol{r}) = -\rho(\boldsymbol{r})/\varepsilon_0$$

med lösning

$$V(\boldsymbol{r}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \mathrm{d}v'$$

vilket motsvarar oändlig utbredningshastighet c.