Föreläsning 10

7.3.1-7.3.3, 7.3.6, 8.1.2 i Griffiths

Maxwells ekvationer (Kap. 7.3)

Våra modellagar, som de ser ut nu, är

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \quad \text{Faradays lag} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \quad \text{Ampères lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t) \quad \text{Gauss lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad \text{Flödeskonservering} \end{cases}$$

Maxwell insåg att dessa ekvationer inte var kompletta!! Kontinutetsekvationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

är ej uppfylld!! Vi ser att så är fallet genom att ta divergensen på Ampères lag.

$$0 = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H}) = \nabla \cdot \boldsymbol{J}$$

Motsägelse!!
Det fattas en term på höger sida. Gauss lag medför

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{D}$$

Modifierad (korrekt) version av Ampères lag är

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

Notera kopplingen mellan $\boldsymbol{H}$- och $\boldsymbol{D}$-fälten.

Anmärkning: Den extra termen $\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}$ fungerar som en strömtäthet, och kallas ofta för förskjutningsströmmen.
Vi får Maxwells fältekvationer:

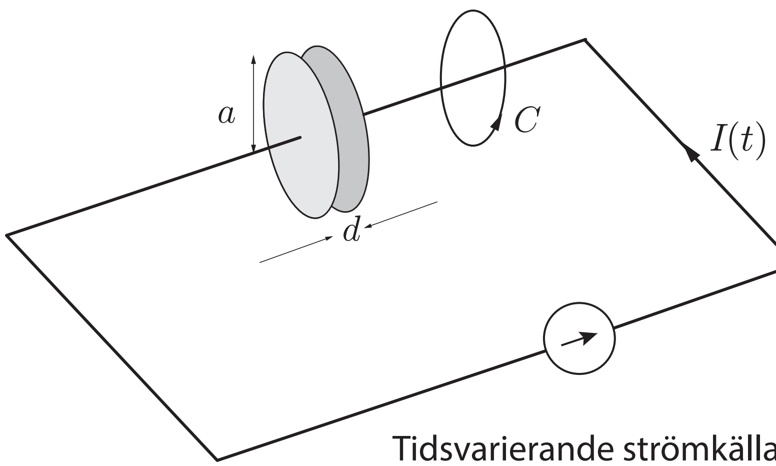
$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \quad \text{Faradays lag} \\ \nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \quad \text{Ampères (generaliserade) lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r},t) \quad \text{Gauss lag} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad \text{Flödeskonservering} \end{array}}$$

eller på integralform

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int_L \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \quad \text{Faradays lag}\\
&\int_L \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I_{\text{enc}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S \quad \text{Ampères (generaliserade) lag}\\
&\iint_S \boldsymbol{D}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = Q_{\text{enc}} \quad \text{Gauss lag}\\
&\iint_S \boldsymbol{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S = 0 \quad \text{Flödeskonservering}
\end{aligned}}$$

Vi har nu samtliga ekvationer för de elektromagnetiska fälten.

Lösning av skenbar paradox



A. Ampères lag (före Maxwell)

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}(t)$$

1. Om strömmen beräknas genom "plana ytan" $I_{\text{enc}}(t) = I(t)$, vilket leder till ett konsistent resultat
2. Om vi istället väljer en yta genom kondensatorn (ingen ström korsas!) blir $I_{\text{enc}}(t) = 0$, vilket leder till en motsägelse, eftersom tangentlinjeintegralen av $\boldsymbol{B}$ är skild från noll

B. Ampères lag (Maxwell)

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}S$$

Det elektriska fältet utanför kondensatorn är försumbart, $\boldsymbol{E}\approx\boldsymbol{0}$. Inuti kondensatorn gäller $\boldsymbol{E}(t) = E(t)\hat{\boldsymbol{z}}$, där

$$E(t) = \frac{\rho_S(t)}{\varepsilon_0} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0 A} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \frac{I(t)}{\varepsilon_0 A}$$

eftersom strömmen $I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$.

1. Om strömmen beräknas genom "plana ytan"

$$\mu_0 I_{\mathrm{enc}} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}_{\approx \boldsymbol{0}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \mu_0 I(t)$$

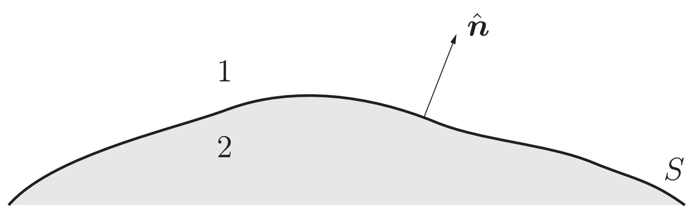
2. Om vi istället väljer en yta genom kondensatorn (ingen ström korsas!) blir

$$\mu_0 \underbrace{I_{\mathrm{enc}}}_{=0} + \varepsilon_0\mu_0 \iint_S \frac{\partial E}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \varepsilon_0\mu_0 \frac{I(t)}{\varepsilon_0 A} A = \mu_0 I(t)$$

Båda resultaten är nu konsistenta.

Randvillkor (Kap. 7.3.6)

(Randvillkoren tas upp i föreläsning 12. Där används de för att bestämma reflektion och transmission av elektromagnetiska vågor). De till Maxwells ekvationer förenliga randvillkor är:



1. $$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{0}$$

   (tangentialkomponenten av den elektriska fältstyrkan är alltid kontinuerlig)

2. $$\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{J}_{Sf}$$

   (tangentialkomponenten av den magnetiska fältstyrkan är diskontinuerlig med språng $\boldsymbol{J}_{Sf}$, fria ytströmmar)

3. $$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{B}_2 = 0$$

   (normalkomponenten av den magnetiska flödestätheten är alltid kontinuerlig)

4. $$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_1 - \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{D}_2 = \rho_{Sf}$$

   (normalkomponenten av den elektriska flödestätheten är diskontinuerlig med språng ρ_{Sf}, fria ytladdningar)

Poyntings teorem (Kap. 8.1.2)

Använd vektoridentiteten

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{H})$$

Sätt in Faradays och Ampères lagar (index f slopas)

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{E} \cdot \left(\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \right)$$

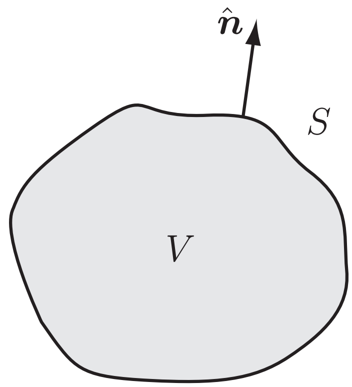
Antag, linjärt, isotropt (μ, ε konstanta) material, dvs.

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \end{cases}$$

Detta leder till

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) &= -\mu \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{H}}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{H})} - \epsilon \underbrace{\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E})} - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \end{aligned}$$

Här är $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$ den fria strömtätheten.
Antag en volym V som omsluts av en yta S med utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$. Integrera uttrycket ovan över volymen V.



Resultatet blir

$$\underbrace{\iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \, \mathrm{d}v}_{\text{term 1}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \frac{1}{2} (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) \, \mathrm{d}v}_{\text{term 2}} + \underbrace{\iiint_V \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}) \, \mathrm{d}v}_{\text{term 3}} = 0 \tag{0.1}$$

Tolkning:

Term 1 Termen

$$\iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \, \mathrm{d}v$$

är effektutvecklingen P, som det elektriska fältet utför på de fria laddningsbärarna (jfr $P = RI^2$)

Term 2 Denna term är tidsderivatan av den energi som är upplagrad (bunden) i de elektriska och magnetiska fälten, dvs.

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) \, \mathrm{d}v$$

där

$$W_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\iiint_V (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}) \, \mathrm{d}v$$

Term 3 Denna term är relaterad till den effekt som strålar genom ytan S. Divergenssatsen ger

$$\iiint_V \nabla\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \, \mathrm{d}v = \iint_S (\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \text{effekten som försvinner ut ur ytan } S$$

Effektbalans:

$$\boxed{\text{Effektutveckling} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{elektrisk och magnetisk energi}) + \text{utstrålad effekt} = 0}$$

Definition: Poyntings vektor $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ anger effektflödestätheten (effekt per ytenhet) till både storlek och riktning, som det elektromagnetiska fältet för med sig.

Kommentar: Griffiths härleder Poyntings teorem i avsnitt 8.1.2. I sin version av teoremet har han den totala strömtätheten $\boldsymbol{J}$ och den upplagrade elektromagnetiska energitätheten $u_{\mathrm{em}} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right)$. Det är ingen konflikt mellan Griffiths relation och (0.1). Skillnaden ligger i definitionerna av upplagrad energitäthet och effektförluster. Termen $\boldsymbol{J}_{\mathrm{f}} \cdot \boldsymbol{E}$ är den effekt som övergår i värme medan $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E}$ är effekten som fältet ger till både de fria och bundna laddningsbärarna.