

# Skriftlig tentamen i Elektromagnetisk fältteori för $\pi 3$ (ETEF01) och F3 (EITF85)

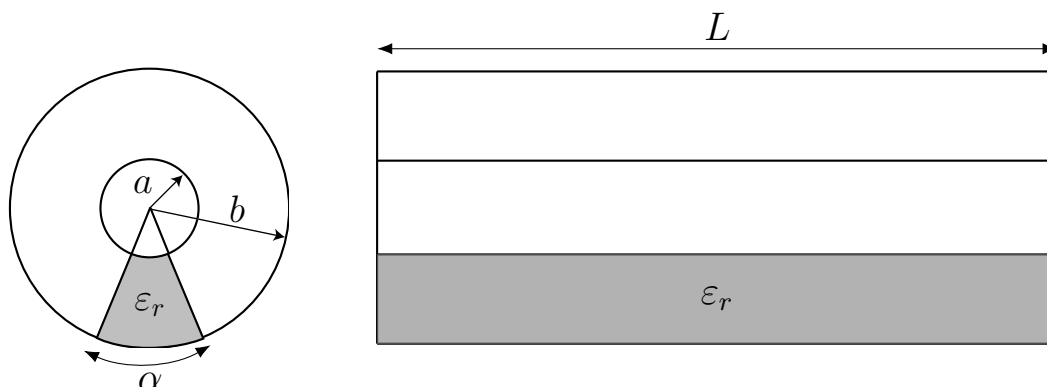
**Tid och plats:** 30 oktober 2019, kl. 14.00–19.00, lokal: Vic:1–HELA.

**Ansvarig lärare under tentamen:** Johan Lundgren.

**Tillåtna hjälpmedel:** Formelsamling i elektromagnetisk fältteori samt kalkylator.

**Betygsättning:** Varje uppgift ger maximalt 10 poäng. Slutbetyget på tentan ges av heltalsdelen av (totalt antal poäng)/10, dock högst 5.

1

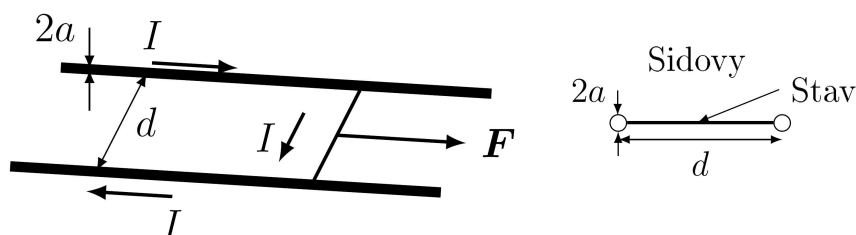


En koaxiell kondensator med innerledaren vid  $r_c = a$  och ytterledaren vid  $r_c = b$  och längden  $L$ , har fyllts med ett dielektrikum med permittiviteten  $\epsilon_r$ , se figuren till höger. Dielektrikat täcker dock inte hela kondensatorns tvärsnitt, utan fyller bara ut den andel av tvärsnittet som motsvarar vinkeln  $\alpha$ , se figuren till vänster. Övriga områden i kondensatorn är luftfyllda, och  $L \gg b$  (randeffekter kan försummas).

- Bestäm kondensatorns kapacitans som funktion av vinkeln  $\alpha$ !
- Bestäm kondensatorns kapacitans för specialfallet när  $\alpha = \pi$ , när  $\alpha = 0$  samt när  $\alpha = 2\pi$ . Kommentera svaren!

2

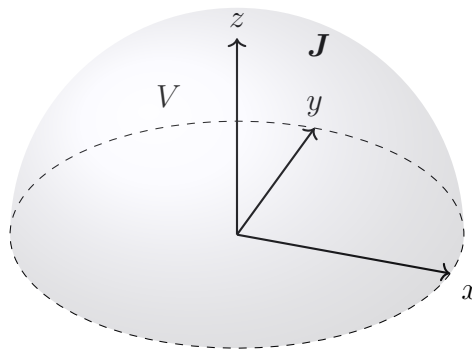
En "railgun" är ett experimentellt vapen som utvecklats inom den amerikanska flottans forskningsavdelning. Railgun avfyrar en projektil med hjälp av ström som går igenom två skenor (eng rail = 'skena') som skapar ett magnetfält som med Lorentzkraften driver projektilen framåt, se figuren.



Till skillnad från ett eldvapen, används inget sprängmedel. Strömmen går genom den ena av de två skenorna, genom projektilen, och tillbaka genom den andra skenan. När projektilen lämnar skenorna bryts strömmen. Man har beräknat att en railgun kan skjuta en projektil upp till 20 gånger längre än en konventionell kanon.

Antag att en railgun består av två parallella, horisontellt placerade ledare (cirkulära skenor med radie  $a$ ), som för en konstant ström  $I$ . Avståndet mellan skenornas centra är  $d$ . En fritt rörlig tunn stav (längd  $d$ ) sluter kretsen och är placerad mitt emellan de cirkulära skenorna (staven rör sig längs med en ränna i mitten av varje skena), se figuren ovan. Bestäm hur stor kraft  $\mathbf{F}$  staven utsätts för!

3



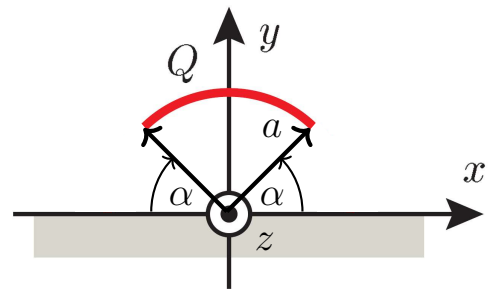
En tidsharmonisk volymströmtäthet  $\mathbf{J}$  med vinkelfrekvensen  $\omega$  finns i en halvsfär, vars geometri visas i figuren ovan. Sfärens radie är  $a$ . Strömtäthetsvektorn ges av  $\mathbf{J} = J_0 \cos(\omega t)(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$  där  $J_0$  är en konstant och frekvensen  $\omega$  är såpass låg, att statistiska uttryck för vektorpotentialer och magnetfält kan användas. Bestäm, på komplex form:

- Laddningstätheterna inuti halvsfären och på halvsfärens randytor.
- Vektorpotentialen  $\mathbf{A}$  i origo.

Ledning: På komplex form kan strömtäthetsvektorn uttryckas som  $\mathbf{J} = J_0(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$  och tidsderivatan som  $d/dt \rightarrow i\omega$ .

4

Halvrymden  $y > 0$  avgränsas av en jordad metallyta i  $xz$ -planet. Ovanför metallytan har det placerats en laddad cirkelbåge, enligt figuren. Cirkelbågen befinner sig i  $xy$ -planet, har radie  $a$  och totalladdningen  $Q$ . Laddningen är fördelad över båglängden så att  $\rho_l \propto \sin \varphi$  ( $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$ ) där  $0 \leq \alpha < \pi/2$ .



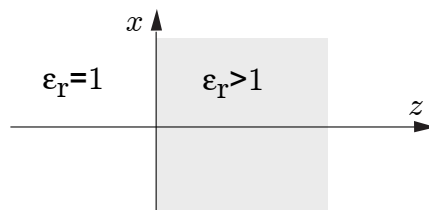
a) Bestäm det elektriska fältet längs  $z$ -axeln, på ovansidan av metallytan, som funktion av  $\alpha$ .

b) För godtycklig riktning i  $xz$ -planet, bestäm det elektriska fältet på stora avstånd från origo ( $r \gg a$ ) som funktion av  $\alpha$ .

c) Vad händer med svaren i (a) och (b) i specialfallet  $\alpha = 0$ ? Linjeladdningen förutsätts fortfarande vara isolerad från metallplanet, i detta fall.

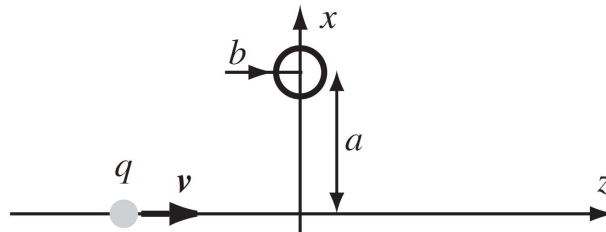
Ledning: Dipolmomentet av en linjeladdningsfördelning kan i allmänhet beräknas som  $\mathbf{p} = \int_C \rho_l(\mathbf{r})\mathbf{r}d\ell$ .

5



I halvrymden  $z < 0$  råder vakuüm, medan halvrymden  $z > 0$  består av ett oledande dielektriskt material med en okänd relativ permittivitet  $\epsilon_{r2} > 1$ . Permeabiliteten är  $\mu_r = 1$  i båda områden. En planvåg  $\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{\mathbf{x}}$  sänds in från vänster och ger upphov till en reflekterad och transmitterad planvåg. Bestäm  $\epsilon_{r2}$  för materialet i området  $z > 0$ , utifrån observationen att 75 % av tidsmedelvärdet av den infallande vågens effekt  $\langle \mathbf{S}_{in} \rangle$  transmittteras vidare in i området  $z > 0$ !

6



En punktladdning  $q$  rör sig med den konstanta hastigheten  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$  ( $v > 0$ ) längs  $z$ -axeln. Kring punkten  $a\hat{\mathbf{x}}$  ligger det i  $xz$ -planet en cirkulär slinga med radien  $b$ , resistansen  $R$  och försumbar egeninduktans. Slingan är liten, d.v.s.  $b \ll a$ . Bestäm den i slingan utvecklade värmeenergin!

Ledningar: Om laddningen passerar origo vid tiden  $t = 0$ , blir magnetfältet

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 q \mathbf{v} \times (\mathbf{r} - \mathbf{vt})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{vt}|^3}$$

Lämplig integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(q^2 + x^2)^5} dx = \frac{5\pi}{256q^7}$$

## Lösningar till tentamen i EF för $\pi 3$ och F3

**Tid och plats:** 30 oktober 2019, kl. 14.00–19.00, lokal: Vic:1–HELA.

**Kursansvarig lärare:** Mariana Dalarsson.

### Lösning problem 1

a) Kondensatorn kan ses som en parallellkoppling av två kondensatorer, en helt fylld med dielektrikum ( $C_1$ ) och en helt fylld med luft ( $C_2$ ). Totala kapacitansen är därmed

$$C = C_1 + C_2$$

där kapacitanserna fås enligt

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(b/a)} \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$C_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \cdot \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$$

$$C_{\text{tot}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \cdot \left[ \epsilon_r \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{2\pi - \alpha}{2\pi} \right] = \text{Svar.}$$

b) För det första ska vi inse att när  $\alpha = \pi$  är halva kondensatorn fylld av dielektrikat. När  $\alpha = 0$  finns inget dielektrikum någonstans, och när  $\alpha = 2\pi$  är hela kondensatorn fylld med dielektrikat.

**Svar:**

$$C_{\text{tot}}(\alpha = \pi) = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \cdot \left[ \epsilon_r \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)} \cdot \left[ \epsilon_r \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

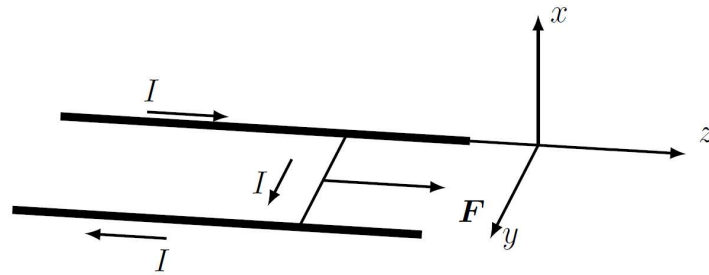
$$C_{\text{tot}}(\alpha = 0) = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

som förväntat för en helt luftfylld cylindrisk kondensator, och

$$C_{\text{tot}}(\alpha = 2\pi) = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r L}{\ln(b/a)}$$

som förväntat för en cylindrisk kondensator helt fylld med dielektrika.

## Lösning problem 2



a) Vi inför ett koordinatsystem så att den ena skenan sammanfaller med  $z$ -axeln och den andra ligger i  $yz$ -planet, d.v.s. skenorna parameterframställs av  $z\hat{z}$  och  $z\hat{z} + d\hat{y}$ . Ett strömelement med längden  $dy$  påverkas av kraften

$$d\mathbf{F} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} = I d\hat{y} \times \mathbf{B}(y)$$

så vi behöver bara räkna fram  $\mathbf{B}(y)$ , som en superposition av  $\mathbf{B}_1(y)$  från den ena ledaren och  $\mathbf{B}_2(y)$  från den andra. Om ledarna vore oändligt långa, skulle vi lätt kunna få via Amperès lag och högerhandsregeln att

$$\mathbf{B}_1(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x} \quad , \quad \mathbf{B}_2(y) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-y)} \hat{x}$$

Men så lätt är det inte i detta fall, då båda ledarna inte är oändligt långa åt båda hållen, utan slutar vid punkten där fältet räknas ( $I = 0$  bortom skenan). Magnetfältet förblir riktat i  $-\hat{x}$ -riktningen, men dess storlek måste räknas med hjälp av formeln för ett ändligt linjeströmsegment. Fältet från en sådan fås t.ex. av Griffiths Exempel 5.5 (ekvation 5.37), som säger

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

För  $\theta_1 = -\pi/2$  och  $\theta_2 = +\pi/2$  (se Griffiths figur) får vi det vanliga svaret för en oändligt lång linjeledare, d.v.s.  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Vinklarna kan betraktas som att linjeladdningen är "oändlig" åt båda hållen om det radiella avståndet mellan fältpunkten och linjeströmsegmentet. För en halvoändlig linjeström, blir däremot  $\theta_2 = \pi/2$  och  $\theta_1 = 0$ . D.v.s. ledarna är bara oändliga åt ena hållet om skenan, vilket är precis vad vi har här. Då får vi

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$

vilket är precis hälften av fältet från en oändligt lång linjeström. Det går även att resonera sig fram till detta resultat utan att använda Biot-Savarts lag, och det är genom att inse att p.g.a symmetrin bidrar en halvoändlig ledare med hälften så mycket fält/kraft som en ledare som är oändlig åt båda hållen. Alltså får vi

$$\mathbf{B}_1(y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi y} \hat{x} \quad , \quad \mathbf{B}_2(y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi(d-y)} \hat{x}$$

Därmed blir

$$\mathbf{B}(y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) \hat{\mathbf{x}}$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = I d\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{B}(y) &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \int_a^{d-a} dy \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{d-y} \right) \hat{\mathbf{y}} \times (-\hat{\mathbf{x}}) = \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \left[ \ln \frac{d-a}{a} - \ln \frac{a}{d-a} \right] = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{\mathbf{z}} \left( 2 \ln \frac{d-a}{a} \right) \end{aligned}$$

Slutligen får vi

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \ln \frac{d-a}{a} \approx \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{\mathbf{z}} \ln \frac{d}{a} = \mathbf{Svar.}$$

där det sista steget fås om man antar att  $a \ll d$ .

### Lösning problem 3

a) Kontinuitetsekvationen lyder

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ}{dt} = -i\omega Q$$

där  $S$  är randen till volymen  $V$  där volymströmtätheten  $\mathbf{J}$  finns. Gauss sats ger då

$$-i\omega \int_V \rho dV = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV$$

så att

$$\rho = -\frac{1}{i\omega} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Därmed får vi i hela volymen, förutom på randytan, rymdladdningstätheten noll. Vi vet nu att även om volymladdningstätheten  $\rho$  är noll, så för att det ska kunna finnas en ström, måste laddningar finnas någonstans. Då kan vi dra slutsatsen att laddningarna måste finnas på ytan och ha formen

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{dQ_S}{dt} = -i\omega \int_S \rho_S dS \Rightarrow \rho_S = \frac{1}{-i\omega} \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Om vi analyserar ytladdningstätheten på "bottenytan" där  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ , får vi direkt att den är noll. Om vi istället kollar på ytladdningstätheten på "kalottytan" med  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{r}}$ , har vi

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}$$

Strömtäthetsvektorn ges på komplex form av

$$\mathbf{J} = J_0(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})$$

så att

$$\rho_S(r = a) = -\frac{J_0}{i\omega} (-\sin \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) = \mathbf{Svar (a)}.$$

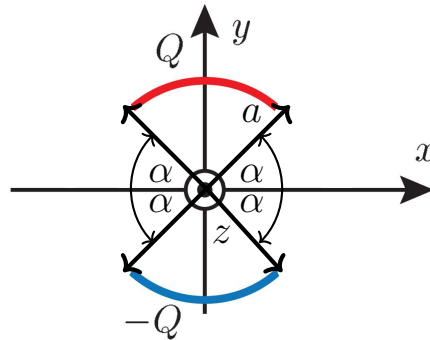
b) Vektorpotentialen  $\mathbf{A}$  i origo beräknas i sfäriska koordinater som

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{0} - \mathbf{r}'|} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_0(-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{r'}$$

Det innebär att

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} (-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \int_0^a r' dr' 2\pi = \frac{\mu_0 J_0 a^2}{4} (-\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{Svar (b)}.$$

## Lösning problem 4



Vi har att  $\rho_l = \rho_{l0} \sin \varphi$  samt att  $0 \leq \alpha < \pi/2$ . Detta ger totalladdningen

$$Q = \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \rho_{l0} \sin \varphi a d\varphi = \rho_{l0} a \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi d\varphi$$

$$Q = a \rho_{l0} (-\cos \varphi)_{\alpha}^{\pi-\alpha} = 2\rho_{l0} a \cos \alpha \Rightarrow \rho_{l0} = \frac{Q}{2a \cos \alpha}$$

Därmed får vi linjeladdningstätheten

$$\rho_l(\varphi) = \frac{Q \sin \varphi}{2a \cos \alpha}$$

Laddningstätheten på metallskivan kan enligt speglingsmetoden representeras av en speglad halvcirkelformad linjeladdning, med den totala laddningen  $-Q$  (se figuren ovan). Eftersom  $\rho_l$  är en udda funktion av  $\varphi$ , ges den speglade linjeladdningstätheten

av samma uttryck, d.v.s.  $\rho_l(\varphi) = \frac{Q \sin \varphi}{2a \cos \alpha}$  och

$$Q_{\text{speglad}} = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \int_{-(\pi-\alpha)}^{-\alpha} \sin \varphi d\varphi = \{\beta = -\varphi\} = \frac{Q}{2 \cos \alpha} \int_{(\pi-\alpha)}^{\alpha} \sin \beta d\beta = -Q$$

a) Det elektriska fältet blir då enligt Coulombs lag

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\ell}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a \cos \alpha} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi' \frac{z\hat{\mathbf{z}} - a\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi' - a\hat{\mathbf{y}} \sin \varphi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\varphi'$$

$$+ \dots = \int_{-(\pi-\alpha)}^{-\alpha} \dots$$

De udda delarna i de två integralerna tar ut varandra och endast de jämna delarna bidrar, med lika mycket

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha (z^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin^2 \varphi' d\varphi' \\ &= -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha (z^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \left[ \frac{\varphi'}{2} - \frac{\sin(2\varphi')}{4} \right]_{\alpha}^{\pi-\alpha} \end{aligned}$$

Slutligen får vi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha (z^2 + a^2)^{3/2}} \cdot \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right] = \mathbf{Svar (a)}.$$

b) Konfigurationen har den totala laddningen noll, så dess dipolmoment är entydigt

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \rho_l(\mathbf{r}) \mathbf{r} dl = \frac{Q}{2a \cos \alpha} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \varphi a (\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi) a d\varphi \\ &\quad + \frac{Q}{2a \cos \alpha} \int_{-(\pi-\alpha)}^{-\alpha} \sin \varphi a (\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi) a d\varphi \end{aligned}$$

Återigen tar de udda delarna ut varandra och de jämna delarna bidrar lika mycket. Så vi får

$$\mathbf{p} = \frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{\cos \alpha} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{\cos \alpha} \left[ \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin(2\varphi)}{4} \right]_{\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{\cos \alpha} \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right]$$

Dipolbidraget förväntas dominera på stora avstånd  $r \gg a$ . I riktningen vinkelrät mot dipolmomentet kan det elektriska fältet därmed beräknas som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha r^3} \left[ \frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right] = \mathbf{Svar (b)}.$$

c) För  $\alpha = 0$  får vi för svaren i (a) och (b)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{8\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}} = \mathbf{Delsvar (c)}.$$

$$\mathbf{E}(r \gg a) = -\frac{Qa\hat{\mathbf{y}}}{8\epsilon_0 r^3} = \mathbf{Delsvar (c)}.$$

Med  $z = r$  ser vi att resultatet från (a) närmar sig resultatet från (b) när  $r \gg a$ , som väntat.



## Lösning problem 5

Från randvillkoren följer att transmissionen av elektriska fältet från vänster till höger halvrymd ges av (se föreläsning 12)

$$E_{\text{tr}} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} E_{\text{in}}$$

För tidsmedelvärdet av den transmitterade effekten, har vi (se föreläsning 12)

$$\langle |\mathbf{S}_{\text{tr}}| \rangle = \frac{|E_{\text{tr}}|^2}{2\eta_2} = \frac{4\eta_2^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \frac{|E_{\text{in}}|^2}{2\eta_2} = \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \frac{|E_{\text{in}}|^2}{2\eta_1} = \frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} \langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle = \frac{3}{4} \langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle$$

Vi har att  $\eta_1$  är känd och lika med vågimpedansen i vakuum. Alltså behöver vi bara lösa för  $\eta_2$

$$\frac{4\eta_1\eta_2}{(\eta_1 + \eta_2)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16\eta_1\eta_2 = 3\eta_2^2 + 6\eta_1\eta_2 + 3\eta_1^2 \Rightarrow \eta_2^2 - 2\frac{5\eta_1}{3}\eta_2 + \eta_1^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\eta_2 = \frac{5\eta_1}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}\eta_1^2 - \eta_1^2} = \frac{5\eta_1}{3} \pm \frac{4\eta_1}{3} = \begin{cases} 3\eta_1 \\ 1/3\eta_1 \end{cases}$$

Dividerar vi bort  $\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  från båda sidor får vi att

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon_{r2}}} = \begin{cases} 3 \\ 1/3 \end{cases} \Rightarrow \epsilon_r = \begin{cases} 9 > 1 \\ 1/9 < 1 \end{cases}$$

vilket med kravet att  $\epsilon_{r2} > 1$  slutligen ger  $\epsilon_{r2} = 9 = \mathbf{Svar.}$

## Lösning problem 6

$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$  och  $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{x}}$  ger att magnetfältet i slingans mittpunkt blir

$$\mathbf{B}(a\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{va\hat{\mathbf{y}}}{(a^2 + v^2t^2)^{3/2}}$$

Villkoret  $b \ll a$  ger att magnetiska flödet i positiv  $y$ -led genom slingan blir

$$\Phi(t) \approx \pi b^2 \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{B}(a\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{\mu_0 qb^2 va}{4} \cdot \frac{1}{(a^2 + v^2t^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 qb^2 a}{4v^2} \cdot \frac{1}{((a/v)^2 + t^2)^{3/2}}$$

Den inducerade emk:n blir då

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 qb^2 a}{4v^2} \cdot \frac{3t}{((a/v)^2 + t^2)^{5/2}}$$

Den utvecklade effekten kan vi få ur

$$P(t) = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{9}{16R} \left( \frac{\mu_0 qb^2 a}{v^2} \right)^2 \cdot \frac{t^2}{((a/v)^2 + t^2)^5}$$

vilket slutligen ger oss den utvecklade värmeenergin

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = \frac{9}{16R} \left( \frac{\mu_0 q b^2 a}{v^2} \right)^2 \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{((a/v)^2 + t^2)^5} dt =$$
$$\frac{9}{8R} \left( \frac{\mu_0 q b^2 a}{v^2} \right)^2 \cdot \frac{5\pi}{256(a/v)^7} = \frac{45\pi}{2048} \frac{\mu_0^2 q^2 b^4 v^3}{Ra^5} = \mathbf{Svar.}$$