Lösningar till uppgifter i magnetostatik 2019-10-10

Uppgift 1

(a)

1. Vi beräknar den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ med Ampères lag. Av symmetriskäl har fältet formen $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B(r_\mathrm{c})\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Ampères lag tillämpad på centrerad kurva med radie r_c ger

$$2\pi r_\mathrm{c} B(r_\mathrm{c}) = \begin{cases} 0, & 0 < r_\mathrm{c} < a \\ \mu_0 I, & a < r_\mathrm{c} < b \\ 0, & r_\mathrm{c} > b \end{cases}$$

vilket ger

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_\mathrm{c}}\hat{\boldsymbol{\phi}}, \quad a < r_\mathrm{c} < b = \textbf{Delsvar (a).}$$

För övrigt är fälten noll.

2. Det magnetiska flödet genom en längdsektion (längd l) av kabeln blir

$$\Phi = l\int_a^b \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = l\mu_0\int_a^b \frac{I}{2\pi r_\mathrm{c}}\,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{Il\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

vilket ger självinduktansen L per längdenhet

$$L = \frac{\Phi}{lI} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \textbf{Delsvar (a).}$$

3. Som kontroll kan vi räkna ut den upplagrade magnetiska energin per längdenhet. Den upplagrade energin per längdenhet i koaxialkabeln är (V är volymen i området mellan ledarna på en längd l, $\mathrm{d}v = r_\mathrm{c}\mathrm{d}r_\mathrm{c}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$)

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2l\mu_0}\iiint_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2l\mu_0}2\pi l\int_a^b \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 r_\mathrm{c}^2} r_\mathrm{c}\,\mathrm{d}r_\mathrm{c} = \frac{I^2\mu_0}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r_\mathrm{c}}{r_\mathrm{c}} = \frac{I^2\mu_0}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

vilket vid jämförelse med uttrycket $W_\mathrm{m} = LI^2/2$ ger

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \textbf{Delsvar (a).}$$

(b) Vi använder sambandet $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}LI^2$ för att bestämma L. Skillnaden mot uppgift (a) är att det nu finns upplagrad energi även i innerledaren. Eftersom strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittet ger Ampères lag följande magnetfält i innerledaren

$$\boldsymbol{H}(r_c) = \frac{Ir_c}{2\pi a^2}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Den magnetiska energin per längdenhet i innerledaren är

$$W_{\mathrm{m,inner}} = \frac{\mu_0}{2} 2\pi \int_0^a |\boldsymbol{H}(r_c)|^2 r_c \,\mathrm{d}r_c = \frac{\mu_0}{2} 2\pi \int_0^a \left(\frac{I r_c}{2\pi a^2} \right)^2 r_c \,\mathrm{d}r_c = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Mellan ledarna är energin densamma som i uppgift (a). Det ger totala magnetiska energin

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{I^2 \mu_0}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Därmed fås självinduktansen

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{\mu_0}{8\pi} = \textbf{Svar (b).}$$

Uppgift 2

(a) Den tredimensionella kontinuitetsekvationen lyder

$$\int_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega Q$$

Vi har dock en ytströmtäthet $\boldsymbol{J}_S$ och inte en volymströmtäthet $\boldsymbol{J}$. Kontinuitetsekvationens motsvarighet i två dimensioner blir då

$$\oint_C \boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C \,\mathrm{d}C = -\mathrm{i}\omega Q = -\mathrm{i}\omega \int_S \rho_S \mathrm{d}S$$

där C är randen till metallskivan och $\hat{\boldsymbol{n}}_C$ nu är normalen till randen i varje punkt på randen. Den tvådimensionella motsvarigheten till Gauss sats ger då

$$-\mathrm{i}\omega \int_S \rho_S \mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C \,\mathrm{d}C = \int_S \nabla_{2D} \cdot \boldsymbol{J}_S \mathrm{d}S$$

så att

$$\rho_S = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega} \nabla_{2D} \cdot \boldsymbol{J}_S = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \left(\frac{\partial J_{Sx}}{\partial x} + \frac{\partial J_{Sy}}{\partial y} \right) \equiv 0$$

Därmed får vi på hela skivan, förutom på randen, ytladdningstätheten 0. Vi vet nu att, för den tredimensionella kontinuitetsekvationen, gäller att även om volymladdningstätheten ρ är noll, så för att det ska kunna finnas en ström, måste laddningar finnas någonstans. I det tredimensionella fallet, kan vi dra slutsatsen att laddningarna måste finnas på ytan och ha formen

$$\int_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \,\mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}Q_S}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{i}\omega \int_S \rho_S \mathrm{d}S \;\Rightarrow\; \rho_S = \frac{1}{-\mathrm{i}\omega} \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$$

I det tvådimensionella fallet, som vi har här, betyder det att det måste finnas laddningstätheter (linjeladdningar) på randen till ytan där $\boldsymbol{J}_S$ är belägen. Om vi analyserar linjeladdningstätheten på randen C, får vi från den tvådimensionella kontinuitetsekvationen

$$\oint_C \boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C \,\mathrm{d}C = -\mathrm{i}\omega Q = -\mathrm{i}\omega \oint_C \rho_L \mathrm{d}C$$

vilket ger

$$\rho_L = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega} \boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C$$

på olika segment av randen. Normalen till den cirkulära delen av randen med radien b, är

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\varphi\hat{\boldsymbol{y}}$$

Strömtäthetsvektorn ges i komplex form av

$$\boldsymbol{J}_S = J_{S0}(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$$

så att $\boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C$ blir

$$\boldsymbol{J}_S \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_C = J_{S0}(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})(\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\varphi\hat{\boldsymbol{y}}) = J_{S0}(-\cos\varphi + \sin\varphi)$$

Därmed är linjeladdningtätheten

$$\rho_L(r = b) = -\frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega}(-\cos\varphi + \sin\varphi) = \textbf{Delsvar (a)}$$

Normalen på den cirkulära delen av randen med radien a är

$$-\hat{\boldsymbol{r}} = -\cos\varphi\hat{\boldsymbol{x}} - \sin\varphi\hat{\boldsymbol{y}}$$

och linjeladdningstätheten där blir

$$\rho_L(r = a) = \frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega}(-\cos\varphi + \sin\varphi) = \textbf{Delsvar (a)}$$

På randsegmentet med $\varphi = 0$, har vi $\hat{\boldsymbol{n}}_C = -\hat{\boldsymbol{y}}$ och linjeladdningstätheten

$$\rho_L(\varphi = 0) = -\frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega}(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})(-\hat{\boldsymbol{y}}) = \frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega} = \textbf{Delsvar (a)}$$

På randsegmentet med $\varphi = 3\pi/2$, har vi $\hat{\boldsymbol{n}}_C = \hat{\boldsymbol{x}}$ och linjeladdningstätheten

$$\rho_L(\varphi = 3\pi/2) = -\frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega}(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})(\hat{\boldsymbol{x}}) = -\frac{J_{S0}}{\mathrm{i}\omega} = \textbf{Delsvar (a)}$$

(b) Vi söker det elektriska fältet i origo. Vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ i origo beräknas i cylindriska koordinater som

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\boldsymbol{J}_S}{|\boldsymbol{0} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_S\int_S \frac{r_c'\mathrm{d}r_c'\mathrm{d}\varphi'}{r_c'}$$

Det innebär att

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\boldsymbol{J}_S\int_0^{3\pi/2}\mathrm{d}\varphi'\int_a^b \frac{r_c'\mathrm{d}r_c'}{r_c'} = \frac{3\mu_0}{8}\boldsymbol{J}_S(b - a)$$

Det inducerade elektriska fältet blir då

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{0}) = -\mathrm{i}\omega\boldsymbol{A}(\boldsymbol{0}) = -\frac{3\mathrm{i}\omega\mu_0}{8}\boldsymbol{J}_S(b - a)$$

Inför vi $\boldsymbol{J}_S = J_{S0}(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$, blir fältet i origo

$$\boldsymbol{E}(0) = -\frac{3\mathrm{i}\omega\mu_0}{8}J_{S0}(b - a)(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}) = \textbf{Svar (b).}$$

Uppgift 3

På höjden z fås vid spolen att dipolen ger vektorpotentialen

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'))}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{m\hat{\boldsymbol{z}} \times (a\hat{\boldsymbol{r}}_c + z\hat{\boldsymbol{z}}))}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 m a}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

Det magnetiska flödet passerar $\mathrm{d}N = \dfrac{N}{h}\mathrm{d}z$ varv vid höjden z. Detta ger

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}N \int_C \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\ell = 2\pi a A_\varphi \mathrm{d}N = \frac{\mu_0 m a^2 N}{2h} \frac{\mathrm{d}z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 m a^2 N}{2h} \left[\frac{z}{a^2(a^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^h = \frac{\mu_0 m N}{2(a^2 + h^2)^{1/2}}$$

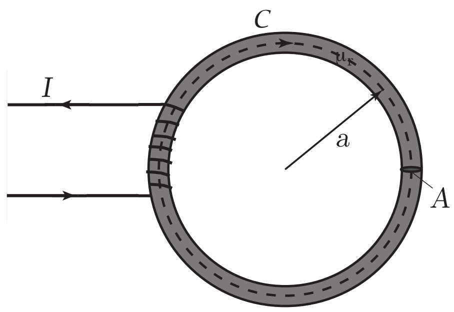
Emk:n, i strömmens definitionsriktning blir då

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 m N}{2} \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \omega b \cos(\omega t)$$

Slutligen fås då strömmen som

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 m N}{2R} \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}} \omega b \cos(\omega t) \;\; , \;\; h = h_0 + b \sin(\omega t) = \textbf{Svar.}$$

Uppgift 4



(a) Det ses av symmetrin att $\boldsymbol{B}$ är riktad i φ-led. Ampères lag ger (se figur, $a = r_c$)

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \mathrm{d}S = NI$$

$$H 2\pi r_c = NI$$

$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r_c}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 \mu_r NI}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \textbf{Svar (a)} \;.$$

(b) Flödet genom järnkärnans tvärsnitt blir

$$\Phi = h \int_a^b B_\varphi(r_c) \mathrm{d}r_c = \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \int_a^b \frac{\mathrm{d}r_c}{r_c} = \frac{\mu_0 \mu_r NIh}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \textbf{Svar (b)} \;.$$

(c) Använd att normalkomponenten av $\boldsymbol{B}$ är kontinuerlig medan normalkomponenten av $\boldsymbol{H}$ inte är det. I järnkärnan blir $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0\mu_r} = \dfrac{B_\varphi(r_c)}{\mu_0\mu_r}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ och i luftgapet blir $\boldsymbol{H} = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \dfrac{B_\varphi(r_c)}{\mu_0}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Ampères lag ger, för ett varv runt cirkeln med radien r_c

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \frac{B_\varphi(r_c)}{\mu_0\mu_r}(2\pi-\delta)r_c + \frac{B_\varphi(r_c)}{\mu_0}\delta r_c = NI \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{B}(r_c) = \frac{\mu_0\mu_r NI}{[(2\pi+(\mu_r-1)\delta)]r_c}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \textbf{Svar (c)}\ .$$

Uppenbarligen är svaren i (a) och (c) lika med varandra när $\delta \to 0$, som väntat.

Uppgift 5

(a) Elektriska och magnetiska fältet för en plan våg är relaterade till varandra enligt

$$\boldsymbol{H} = \eta_0^{-1}\hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}$$

Vi ser från uttrycket för $\boldsymbol{E}$ att $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{z}}$ för den ena delvågen och $\hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{x}}$ för den andra. Därmed fås

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \frac{E_0}{\eta_0}\left(\sin(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{y}} - \sin(\omega t - kx)\hat{\boldsymbol{y}}\right) = \textbf{Delsvar (a)}.$$

där η_0 är vågimpedansen för vakuum. Vi ser att magnetfältet är noll i alla plan

$$x = z + 2n\pi/k$$

Eftersom $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, fås

$$x = z + n\lambda$$

där n är ett godtyckligt heltal = **Delsvar (a)**.

(b) Tidsmedelvärdet av strålningsvektorn ges av

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\}$$

där $\boldsymbol{E}$ och $\boldsymbol{H}$ är de komplexa fälten

$$\boldsymbol{E} = -E_0\left(\mathrm{e}^{ikz}\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{e}^{ikx}\hat{\boldsymbol{z}}\right)$$
$$\boldsymbol{H} = -\frac{E_0}{\eta_0}\left(\mathrm{e}^{ikz} - \mathrm{e}^{ikx}\right)\hat{\boldsymbol{y}}$$

Därmed blir

$$\boldsymbol{S} = \frac{E_0^2}{2\eta_0}\mathrm{Re}\{(1-e^{ik(z-x)})\hat{\boldsymbol{z}} + (1-e^{ik(x-z)}\hat{\boldsymbol{x}}\} = \frac{E_0^2}{2\eta_0}\left(1-\cos(k(z-x))\right)(\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{z}}) = \textbf{Delsvar (b).}$$

Vi ser att $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ i alla plan $x = z + 2n\pi/k$. Vi ser också att $\boldsymbol{S}$ antar sitt maximala värde $\boldsymbol{S} = \frac{E_0^2}{\eta_0}(\hat{\boldsymbol{z}}+\hat{\boldsymbol{x}})$ i alla plan där $x = z + (2n+1)\pi/k$ = **Delsvar (b)**.