

# Lösningar till seminarieuppgifter 2019-09-25

## Uppgift 1

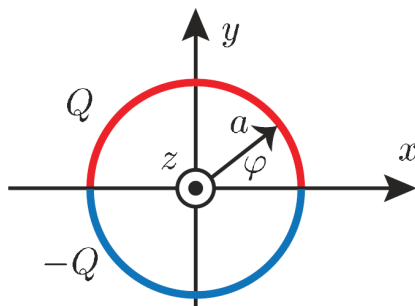
Linjeladdningstätheten  $\rho_l = \rho_{l0}\varphi$  ( $\rho_l \propto \varphi$  enligt uppgiften) ger den totala laddningen

$$Q = \int_0^\pi \rho_{l0} a \varphi d\varphi = \rho_{l0} a \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow \rho_{l0} = \frac{2Q}{a\pi^2}$$

Därmed får vi linjeladdningstätheten

$$\rho_l(\varphi) = \frac{2Q}{a\pi^2} \varphi$$

Laddningstätheten på metallskivan kan enligt speglingsmetoden representeras av en speglad halvcirkelformad linjeladdning, med den totala laddningen  $-Q$ . Se figur.



Eftersom  $\rho_l$  är en udda funktion av  $\varphi$ , ges den speglade linjeladdningstätheten av samma uttryck, d.v.s.  $\rho_l(\varphi) = \frac{2Q}{a\pi^2} \varphi$  och

$$Q_{\text{speglad}} = \int_{-\pi}^0 \frac{2Q}{a\pi^2} a \varphi d\varphi = \frac{2Q}{\pi^2} \left( \frac{\varphi^2}{2} \right)_{-\pi}^0 = -Q$$

(a) Det elektriska fältet blir då enligt Coulombs lag

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\ell}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{a\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi' \frac{z\hat{z} - a\hat{x}\cos\varphi' - a\hat{y}\sin\varphi'}{(z^2 + a^2)^{3/2}} a d\varphi'$$

Endast den jämna delen av integranden bidrar, varför

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\frac{Qa\hat{y}}{2\pi^3\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}} 2 \cdot \int_0^\pi \varphi' \sin\varphi' d\varphi' \\ &= -\frac{Qa\hat{y}}{\pi^3\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}} [\sin\varphi' - \varphi' \cos\varphi']_0^\pi = -\frac{Qa}{\pi^2\epsilon_0(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{y} \end{aligned}$$

På metallskivans yta har vi

$$\rho_S(x=0, z) = \epsilon_0 \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \hat{y} \cdot \mathbf{E} = -\frac{Qa}{\pi^2(z^2 + a^2)^{3/2}} = \text{Svar (a).}$$

(b) Konfigurationen har den totala laddningen noll, så dess dipolmoment är entydigt

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \rho_l(\mathbf{r})\mathbf{r}d\ell = \frac{2Q}{a\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi a(\hat{\mathbf{x}} \cos \varphi + \hat{\mathbf{y}} \sin \varphi) a d\varphi \\ &= \frac{2Qa}{\pi^2} \hat{\mathbf{y}} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4Qa}{\pi^2} \hat{\mathbf{y}} [\sin \varphi - \varphi \cos \varphi]_0^{\pi} = \frac{4Qa}{\pi} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Dipolbidraget förväntas dominera på stora avstånd  $r \gg a$ . I riktningen vinkelrät mot dipolmomentet kan det elektriska fältet beräknas som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{-\mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{Qa}{\pi^2\epsilon_0 r^3} \hat{\mathbf{y}}$$

och ytladdningstätheten blir slutligen

$$\rho_S = \epsilon_0 \hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{E} = -\frac{Qa}{\pi^2 r^3} = \mathbf{Svar (b)}.$$

Med  $z = r$  ser vi att resultatet från (a) närmar sig resultatet från (b) när  $r \gg a$ , som väntat.

## Uppgift 2

Det går att lösa uppgiften på två sätt. Antingen utgår man ifrån energiformeln som inbegriper potentialen och laddningsfördelningen, eller så utgår man ifrån energiformeln där man integrerar upp den elektriska energitätheten över hela rymden. Båda lösningsförslag presenteras nedan:

### Alternativ 1:

Gauss lag ger för  $r > 3a$  (utanför hela konfigurationen):

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{3Q + Q}{\epsilon_0} = \frac{4Q}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad r > 3a$$

Potentialen på den yttre sfären blir

$$V(3a) = - \int_{3a}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{Q}{\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r} \right]_{3a}^{\infty} = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a}$$

När den yttre sfären jordas, minskar potentialen på den inre sfären med  $V(3a)$ . Detta då inuti ett sfäriskt metallskal, skapas en konstant potential med samma värde som på ytan. Denna läggs till potentialen från det inre skalet (superposition!). Energiskillnaden, som omvandlas till värme, blir därmed:

$$\begin{aligned} W_{\text{värme}} &= W_{\text{före}} - W_{\text{efter}} = \left\{ W = \frac{1}{2} QV \right\} \\ &= \frac{1}{2} 3Q \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a} + \frac{1}{2} QV_{\text{inre}} - \left[ 0 + \frac{1}{2} Q \left( V_{\text{inre}} - \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a} \right) \right] = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0 a} = \frac{2}{3} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 a} = \mathbf{Svar}. \end{aligned}$$

### Alternativ 2:

Ett homogent laddat metallskal ger inget inre fält. Således ger sfärerna inte några resulterande krafter på varandra. Utan att behöva utföra något extra arbete, kan vi centrera sfärerna och beräkna energin för det fallet! Gauss lag ger:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} 0, & r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & a < r < 3a \\ \frac{Q}{\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}, & r > 3a \end{cases}$$

Bilda fältenergitätheten  $w_e$

$$w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \begin{cases} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}, & a < r < 3a \\ \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0 r^4}, & r > 3a \end{cases}$$

och integrera över allt rum där  $\mathbf{E}$  finns

$$W_1 = \int w_{e1} dv = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \int_a^{3a} \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0 a}$$
$$W_2 = \int w_{e2} dv = \frac{Q^2}{2\pi^2\epsilon_0} \int_{3a}^{\infty} \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{2Q^2}{3\pi\epsilon_0 a}$$

$W_{\text{före}} = W_1 + W_2$  är den totala energin innan det yttre skalet jordades. Efter att det yttre skalet jordats, finns det inte längre något  $w_e$  utanför sfären, så  $W_{\text{efter}} = W_1$ . Om vi bildar  $W_{\text{före}} - W_{\text{efter}}$  igen, får vi slutligen:

$$W_{\text{före}} - W_{\text{efter}} = W_1 + W_2 - W_1 = W_2 = \frac{2Q^2}{3\pi\epsilon_0 a} = \mathbf{Svar.}$$

### Uppgift 3

a)

1. Sant. Vi kan påstå lite mer, nämligen att det elektriska fältet överallt är riktat radieellt utåt och beror endast av  $r$ ,  $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$ . Det innebär också att potentialen  $V(r)$  endast beror av  $r$ . Vi kan kontrollera att  $\mathbf{E}(r) = E(r)\hat{\mathbf{r}}$  och  $V(r)$  satisfierar alla randvillkor. Randvillkoren är: 1. Potentialen är konstant på varje metallyta. 2. Tangentialkomponenten av  $\mathbf{E}$  är kontinuerlig i gränssytan mellan dielektrikumet och vakuum. 3. Normalkomponenten av  $\mathbf{D}$  är kontinuerlig vid gränssytan mellan dielektrikumet och vakuum. Det är klart att 1 och 2 är uppfyllda. 3 är uppfylld pga av att normalkomponenten av  $\mathbf{E}$  och därmed av  $\mathbf{D}$  är noll vid gränssytan.
2. Falskt.  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  i vakuumdelen och  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  i dielektrikumet.
3. Sant. Följer av analysen för 1.
4. Sant. Det yttersta skalet är jordat. Därmed är  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  utanför detta. Gauss lag säger då att totalladdningen för systemet är noll. Det mittersta skalet och dielektrikumet har noll totalladdning. Då måste det innersta och yttersta skalen ha samma laddning men med motsatt tecken.

5. Sant.  $\mathbf{E}$  beror bara av  $r$  och då beror  $\mathbf{D}$  endast av  $r$  mellan det mittersta och yttersta skalet. Ytladdningen på utsidan av mellanskalet är då konstant.
6. Falskt.  $\mathbf{E}$  beror bara av  $r$ . Eftersom den fria ytladdningstätheten ges av  $\rho_S = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}$  och  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  i vakuumdelen och  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$  vid dielektrikat är den fria ytladdningstätheten  $\epsilon_r$  gånger större vid dielektrikat än i vakuumdelen.
7. Falskt. På insidan är  $V$  konstant,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  och därmed  $Q_{\text{in}} = 0$ .
8. Sant. Det mellersta skalet är oladdat och då måste laddningarna ta ut varandra.
9. Falskt.  $Q_{\text{ut}} = 0$  enligt 4.

**b)** Vi bestämmer först kapacitansen mellan två sfärer med konstant  $\epsilon_r$  mellan sig. Därefter fås totala kapacitansen genom serie- och parallellkopplingar.

Antag två koncentriska sfäriska metallskal med radie  $a$  respektive  $b > a$ . Mellan sfärerna finns ett material med permittiviteten  $\epsilon_r$ . Låt nu den inre sfären ha laddningen  $Q$  och den yttre  $-Q$ . Sfärisk symmetri ger  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(r)$ . Gauss lag ger då  $\mathbf{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}}$  mellan skalerna.

Det ger  $\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r r^2} \hat{\mathbf{r}}$  mellan skalerna. Spänningen mellan skalerna är

$$V = \int_a^b \mathbf{E}(r) \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Kapacitansen är därmed

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{ba}{b-a} \quad (1)$$

Vi kan se denna kondensator som två parallellkopplade kondensatorer där var och en av dessa utgörs av två halvsfäriska skal. Kapacitansen för två parallellkopplade kondensatorer är summan av deras kapacitanser. Därmed är kapacitansen för en kondensator bestående av två halvsfäriska skal

$$C_{\text{halv}} = 2\pi \epsilon_0 \epsilon_r \frac{ab}{b-a} \quad (2)$$

Totala kapacitansen  $C$  för vårt system ges av en seriekoppling av den yttre och inre kondensatorerna  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{\text{yttre}}} + \frac{1}{C_{\text{inre}}}$  där  $C_{\text{yttre}}$  är kapacitansen mellan  $r = 2a$  och  $r = 3a$  och  $C_{\text{inre}}$  är kapacitansen mellan  $r = a$  och  $r = 2a$ . Vi utnyttjar att  $C_{\text{inre}}$  kan ses som två parallellkopplade kapacitanser. Enligt (1) och (2) gäller

$$\begin{aligned} C_{\text{yttre}} &= 24\pi \epsilon_0 a \\ C_{\text{inre}} &= 4\pi \epsilon_0 (1 + \epsilon_r) a \end{aligned}$$

Det ger

$$C = \frac{24\pi a \epsilon_0 (1 + \epsilon_r)}{7 + \epsilon_r} = \mathbf{Svar.}$$

## Uppgift 4

Eftersom polarisationen avtar med avståndet från  $z$ -axeln, antar vi att plattan kan approximeras som  $\infty$  stor. Plattans elektriska fält beräknas från de bundna laddningstätheterna:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0,$$

$$\rho_{bS} = \mathbf{P} \cdot (-\hat{\mathbf{r}}_c) = -P_0 \text{ på ytan inuti hålet och}$$

$$\rho_{bS} = \mathbf{P} \cdot (\pm \hat{\mathbf{z}}) = 0 \text{ på ovan- och undersidan.}$$

Den korta staven har dipolmomentet (se ledningen till uppgift 1)

$$\mathbf{p} = \int_{-d}^d z \hat{\mathbf{z}} \rho_l(z) dz = \frac{\rho_{l0}}{d^3} \hat{\mathbf{z}} \int_{-d}^d z^4 dz = \frac{2\rho_{l0}d^2}{5} \hat{\mathbf{z}}$$

Kraften på den korta staven beräknas som  $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = \frac{2\rho_{l0}d^2}{5} \frac{d\mathbf{E}}{dz}$  där  $\mathbf{E}$  beräknas längs  $z$ -axeln. Med  $\mathbf{r} = z\hat{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{r}' = z'\hat{\mathbf{z}} + a\hat{\mathbf{r}}_c$ ,  $dS' = dz'(ad\varphi')$  får vi genom Coulombs lag att

$$\mathbf{E}(z\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \int_0^{2\pi} ad\varphi' (-P_0) \frac{-a\hat{\mathbf{r}}_c + (z-z')\hat{\mathbf{z}}}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}} = -\frac{P_0a}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \int_{-h}^h \frac{(z-z')}{[a^2 + (z-z')^2]^{3/2}} dz'$$

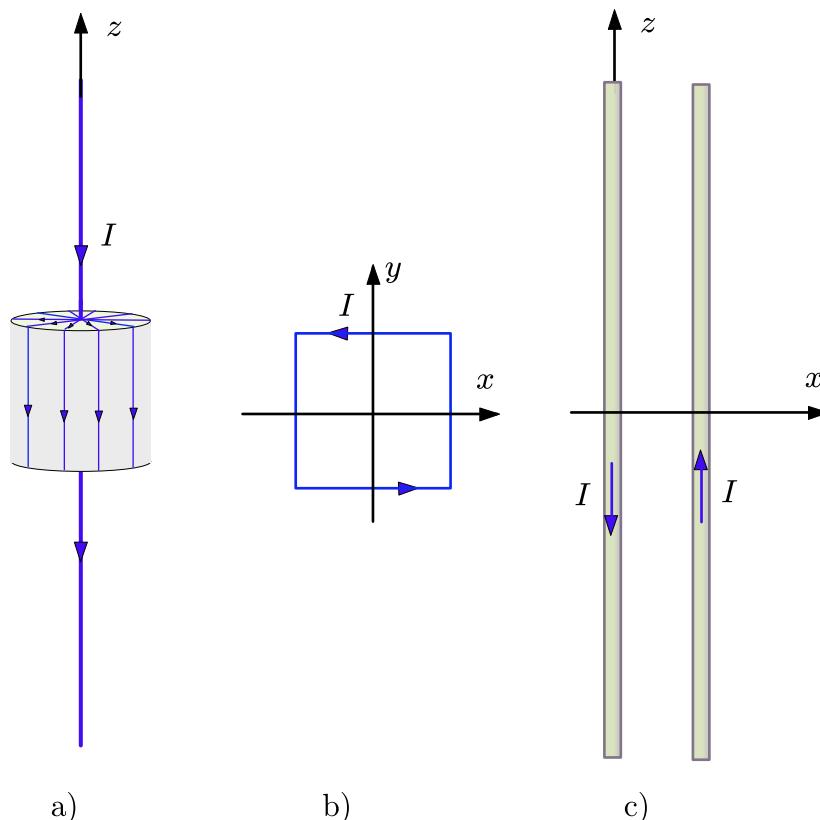
där  $\hat{\mathbf{r}}_c$ -delen av integralen försvunnit då vi integrerar över en hel period. Variabelbyte ger:

$$\mathbf{E}(z\hat{\mathbf{z}}) = -\frac{P_0a}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}} \int_{z-h}^{z+h} \frac{u}{[a^2 + u^2]^{3/2}} du \Rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dz} = -\frac{P_0a}{2\epsilon_0} \left[ \frac{z+h}{[a^2 + (z+h)^2]^{3/2}} - \frac{z-h}{[a^2 + (z-h)^2]^{3/2}} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

där vi i sista steget använt oss av analysens huvudsats. Slutligen fås kraften på den korta staven som:

$$\mathbf{F} = \frac{2\rho_{l0}d^2}{5} \frac{d\mathbf{E}}{dz} \Big|_{z=0} = -\frac{2\rho_{l0}P_0ahd^2}{5\epsilon_0[a^2 + h^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{Svar.}$$

## Uppgift 5



a) Använd Ampères lag. Lagg  $z$ -axeln längs de raka ledarna och låt den peka uppåt. Problemet är axialsymmetriskt och det är i princip då man använder Ampères lag. Det ger  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(r_c)\hat{\phi}$  i varje plan  $z = \text{konstant}$ . Lagg en cirkel med radien  $r_c$  runt  $z$ -axeln. Ampères lag ger

$$B(r_c)2\pi r_c = \mu_0 \cdot \text{ström genom cirkeln}$$

Strömmen genom cirkeln är noll om cirkeln är innanför cylindern och  $-I$  om cirkeln är utanför. Det ger

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{innanför cylindern} \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\phi} & \text{utanför cylindern} \end{cases}$$

b) Använd Biot-Savarts lag. Låt slingan ligga i planet  $z = 0$  av symmetriskäl är flödestätheten riktad i positiv  $z$ -led. De fyra raka ledarna ger samma bidrag till  $\mathbf{B}(\mathbf{0})$ . För den undre ledaren fås

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\boldsymbol{\ell}' \times (\mathbf{0} - \mathbf{r}')}{r'^3}$$

Vi använder  $x'$  som parameter. Den går från  $-a/2$  till  $a/2$ . Det gäller att

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\ell}' &= \hat{\mathbf{x}} dx' \\ \mathbf{r}' &= x' \hat{\mathbf{x}} - \frac{a}{2} \hat{\mathbf{y}} \\ r' &= \sqrt{x'^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ d\boldsymbol{\ell}' \times \mathbf{r}' &= -\frac{a}{2} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Det ger

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{0}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(x'^2 + (a/2)^2)^{1.5}} dx' \hat{\mathbf{z}}$$

Integralen finns i formelsamlingen. Slutsvaret blir

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = 4\mathbf{B}_1(\mathbf{0}) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} \hat{\mathbf{z}}$$

c) Använd Ampères lag. Vardera ledaren ger

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

där man lagt en  $z$ -axel längs ledarens symmetriaxeln och med  $\hat{\mathbf{z}}$  i strömmens riktning. Läger vi ett koordinatsystem enligt figur får vi

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I}{10\pi a} \hat{\mathbf{y}}$$

i båda ledarna.