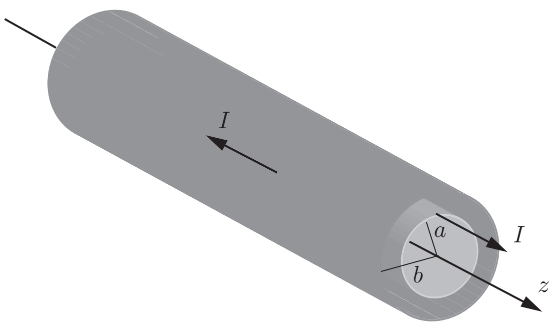
Seminarium i magnetostatik, induktans och vågutbredning 2019-10-10

På kursens andra seminarium kommer vi att räkna två eller tre av nedanstående uppgifter. Förbered dig väl inför seminariet genom att fundera på lämpliga lösningsmetoder.

Uppgift 1



(a) En koaxialkabel består av en tunn cylindrisk ytterledare med radien b, och en tunn cylindrisk innerledare med radien a. Beräkna koaxialkabelns självinduktans per längdenhet genom följande steg:

1. Antag att ytterledaren för en total ström $-I$ och att innerledaren för en total ström I, se figur. Bestäm det magnetiska fältet i området mellan ledarna.
2. Bestäm det magnetiska flödet per längdenhet genom en längdsektor av kabeln, och beräkna sedan koaxialkabelns självinduktans per längdenhet.
3. Kontrollera ditt resultat genom att beräkna självinduktansen per längdenhet från den totalt upplagrade magnetiska energin inuti koaxialkabeln!

(b) Antag nu att koaxialkabeln har en solid innerledare med radien a, men att ytterledaren fortfarande är tunn och har radien b. Strömmen antas vara jämnt fördelad över innerledarens tvärsnitt. Bestäm koaxialkabelns självinduktans per längdenhet.

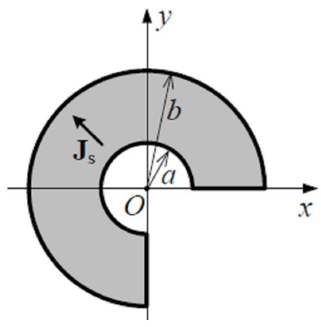
Uppgift 2

En tidsharmonisk ström med vinkelfrekvensen ω finns på ytan av en tunn metallskiva, vars geometri visas i figuren intill. Skivans inre radie är a och yttre radie är b enligt figuren. Strömtäthetsvektorn ges av

$$\boldsymbol{J}_s = J_{S0}\cos(\omega t)(-\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}})$$

där J_{S0} är en konstant. Bestäm, på komplex form:

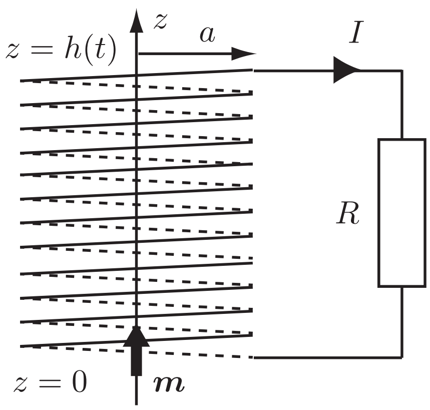
(a) Laddningstätheten på skivan.
(b) Det inducerade elektriska fältet i origo.



Ledning: Utnyttja att problemet är tvådimensionellt!

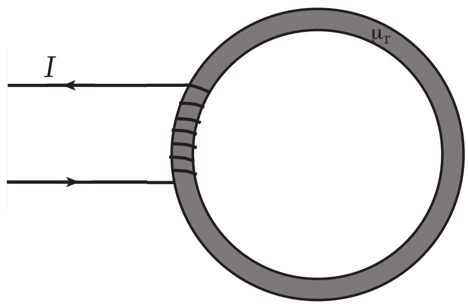
Uppgift 3

En fjäder/solenoidspole med N varv, radien a och längden h är centrerad runt z-axeln mellan $z = 0$ och $z = h$. Fjädern/spolen har en jämn varvtäthet, med tätt mellan varven och försumbar stigning. Till fjädern/spolen har det anslutits en "yttre krets" innehållande ett motstånd R, enligt figuren. I origo finns en statisk magnetisk dipol $\boldsymbol{m} = m\hat{\boldsymbol{z}}$. Spolen/fjädern sträcks och trycks ihop så att det övre ändläget ändras enligt $h(t) = h_0 + b\sin(\omega t)$. Under deformationen antas att jämn varvtäthet behålls.



Under förutsättning att $b \ll h_0$, bestäm strömmen I genom motståndet!
Situationen är kvasistatisk och inverkan av induktanser försummas.

Uppgift 4



(a) En torusformad järnkärna har ett rektangulärt tvärsnitt med innerradien a, ytterradien b och höjden h. Det vill säga, kärnans tvärsnittsarea ges av $A = (b - a) \cdot h$.
Permeabiliteten i järnkärnan är μ_r. Kring järnkärnan har det lindats en spole som för strömmen I med N varv. Bestäm den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ inuti järnkärnan som funktion av det cylindriska avståndet r_c.

(b) Bestäm det magnetiska flödet genom ringens tvärsnitt.

(c) Antag nu att vi gör ett litet luftgap i järnkärnan i form av en sektor med öppningsvinkeln δ. Vad blir den den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ inuti järnkärnan nu? Kontrollera resultatet mot resultatet i (a) för $\delta \to 0$.

Ledning till (c): Om luftgapet är litet har magnetfältet med god approximation formen $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_\varphi(r_c)\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)$ (förutom i närheten av luftgapets kanter, vilket det bortses ifrån).

Uppgift 5

En elektromagnetisk våg är en superposition av två plana linjärpolariserade vågor. Det totala elektriska fältet ges av

$$\boldsymbol{E}(x, z, t) = E_0(\sin(\omega t - kz)\hat{\boldsymbol{x}} + \sin(\omega t - kx)\hat{\boldsymbol{z}})$$

Vågen utbreder sig i vakuum.

(a) Bestäm det magnetiska fältet, och ange var i rummet det alltid är noll.
(b) Bestäm tidsmedelvärdet av strålningsvektorn, och ange var i rummet det är maximalt respektive minimalt.