

Föreläsning 9

7.2.1–7.2.4 i Griffiths

Induktionslagen sammanfattning (Kap. 7.1.3)

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (\text{differentialform})$$

O.B.S. att i det statiska fallet (\mathbf{B} konstant i tiden) är $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0$ som tidigare!
För en stillastående slinga gäller

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (\text{integralform})$$

Elektromotorisk kraft (emk)

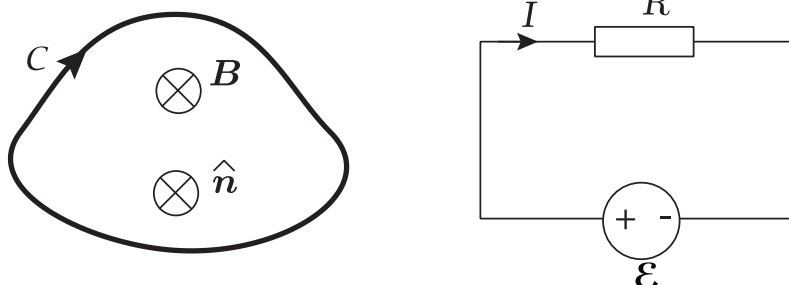
För en rörlig, deformierbar slinga \mathcal{C} i ett tidsvariabelt magnetfält definieras emk:n av

$$\mathcal{E} = \oint_C (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)) \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

där $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ är den hastighet en punkt \mathbf{r} på slingan rör sig med vid tiden t . Man kan visa att

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

För att ta reda på den inducerade emk:n räcker det därmed att finna det magnetiska flödet genom slingan som funktion av t och derivera detta. I en krets fungerar emk:n som en spänningskälla som vill driva en ström i \mathcal{C} :s omloppsriktning.



Likheten mellan Faradays och Ampéres lagar

Notera nu likheterna mellan Faradays och Ampéres lagar.

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Vi vet att rotationsekvationerna inte är tillräckligt för att bestämma \mathbf{E} och \mathbf{B} , utan vi behöver även divergenssekvationerna. I allmänhet är de inte lika för \mathbf{E} och \mathbf{B} , men om vi vet att \mathbf{E} är ett "rent Faradayfält", d.v.s. att \mathbf{E} endast beror på ett tidsföränderligt \mathbf{B} ($\rho = 0$), har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{om } \rho = 0), \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{alltid})$$

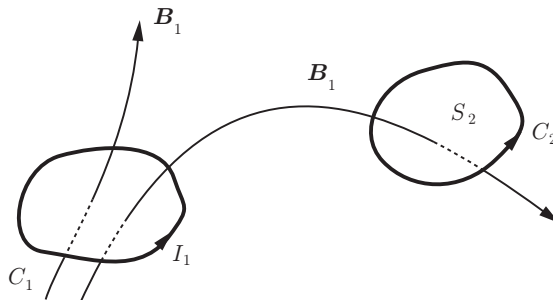
Då är analogin komplett, $-\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ bestämmer \mathbf{E} precis som $\mu_0 \mathbf{J}$ bestämmer \mathbf{B} , och motsvarande lösningar med Ampéres lag kan återvändas!

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad \oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 I_{\text{omfattad}}$$

Se t.ex. Griffiths problem 7.19.

Induktans, stationära strömmar (Kap. 7.2.3)

Betrakta två spolar (slingor eller kurvor) L_1 och L_2 , och låt strömmen I_1 flyta i spole L_1 .



Flödet genom L_2 från L_1 är

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Biot-Savarts lag visar att \mathbf{B}_1 är proportionell mot I_1 .

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

där M_{21} kallas den **ömsesidiga induktansen** mellan spolarna, och beror endast på geometrin hos spolarna. Enhet [H] Henry.

På samma sätt visas att flödet genom L_1 från L_2 är

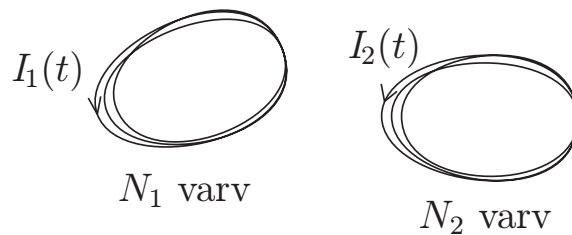
$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = M_{12}I_2$$

Man kan visa att $M_{21} = M_{12} = M$. Detta är väldigt användbart i situationer där M_{21} är mycket enklare att bestämma än M_{12} .

Även begreppet **självinduktans** L för spole 1 definieras genom $\Phi_1 = LI_1$, där Φ_1 är flödet genom L_1 från L_1 själv.

Spolar med flera varv

Om spolarna har flera varv gäller



$$L_1 = N_1 \frac{\Phi_{11}}{I_1} = \text{självinduktans för spole 1}$$

$$L_2 = N_2 \frac{\Phi_{22}}{I_2} = \text{självinduktans för spole 2}$$

$$M_{12} = M_{21} = N_1 \frac{\Phi_{12}}{I_2} = N_2 \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \text{ömsesidig induktans}$$

(betecknas även M)

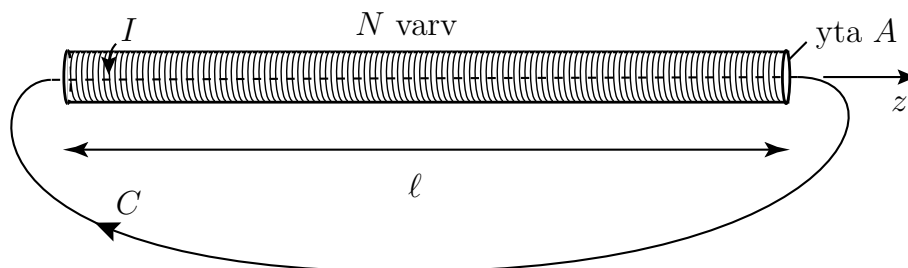
$$\Phi_{ij} = \text{flödet genom ytan } S_i \text{ genererat av strömmen } I_j \text{ i spolen } j$$

De inducerade emk:n i de båda spolarna ges av

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - M_{12} \frac{dI_2(t)}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - M_{21} \frac{dI_1(t)}{dt}$$

Exempel: Induktansen för en lång solenoidspole En lång tät lindad spole med längd ℓ och tvärsnittsytta A är fylld med ett omagnetiskt material ($\mu_r = 1$). Då gäller följande approximationer



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) \approx \begin{cases} \mathbf{0} & \text{utanför spolen} \\ B\hat{\mathbf{z}} & \text{innanför spolen} \end{cases}$$

där B är en konstant. Låt C vara kurvan som går genom spolen och sluts utanför spolen. Ampères lag ger

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \mu_0 \cdot \text{totala strömmen genom } S$$

där ytan S spänns upp av C och $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen till S . Varje varv ger strömmen I genom S och därmed är totala strömmen NI . Detta ger

$$B\ell = \mu_0 NI \Rightarrow \mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{utanför spolen} \\ \mu_0 \frac{NI}{\ell} \hat{\mathbf{z}} & \text{innanför spolen} \end{cases}$$

Flödet genom spolen ges då av

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{z}} dS = \frac{\mu_0 N I A}{\ell}$$

och därmed blir spolens självinduktans

$$L = N \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$$

Exempel: Ömsesidig induktans mellan slinga i spole och spole Antag att vi placerar en plan metallslinga med arean A_0 inuti den långa spolen. Slingans plan är vinkelrätt mot spolens symmetriaxel. Om vi driver en ström I genom spolen fås ett magnetiskt flöde genom slingan som ges av

$$\Phi_{21} = A_0 \cdot B = A_0 \mu_0 \frac{NI}{\ell}$$

Den ömsesidiga induktansen mellan spolen och slingan ges av

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{I} = A_0 \mu_0 \frac{N}{\ell}$$

Vi kan konstatera att det är betydligt enklare att bestämma ömsesidiga induktansen genom att driva en ström genom spolen och bestämma flödet genom slingan än tvärtom.

Magnetisk energi (7.2.4)

Det går att visa tre olika uttryck för magnetisk energi i ett system.

En krets

Antag att vi har en slinga med självinduktans L . Om det flyter en ström I genom slingan är den magnetiska energin

$$W = \frac{1}{2}LI^2$$

Flera kretsar som kopplar magnetiskt

Antag att vi har ett system med N kretsar med självinduktanser L_n , $n = 1 \dots N$ och ömsesidiga induktanser M_{ij} , $i = 1 \dots N$, $j = 1 \dots N$, $i \neq j$. Om det flyter strömmar I_n , $n = 1 \dots N$ i kretsarna är systemets magnetiska energi

$$W = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^N L_n I_n^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N M_{ij} I_i I_j \right) \quad (0.1)$$

Utbredd strömtäthet \mathbf{J}

Antag ett system som består av en strömtäthet $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ i en volym \mathcal{V} . Systemets magnetiska energi är

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} \, dv$$

Tolkningen är att energin är upplagrad i strömmarna.

Allmänt uttryck

Antag att vi har ett system som har en magnetisk flödestäthet \mathbf{B} i rummet. Den magnetiska energin kan då skrivas

$$W = \frac{1}{2} \int_{\text{allt rum}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \, dv \quad (0.2)$$

Tolkningen är att energin finns upplagrad i magnetfältet. Den magnetiska energitätheten i rummet är då

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}$$

I vakuum gäller $\mu_r = 1$ och

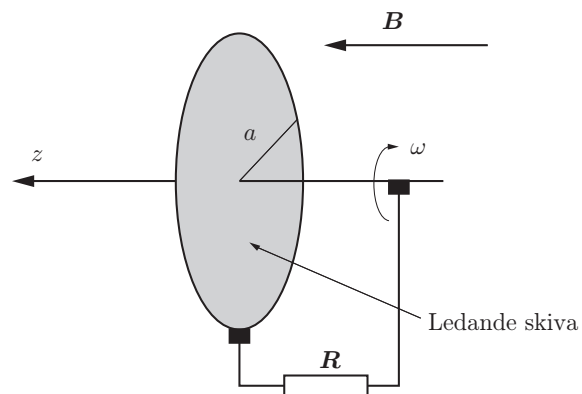
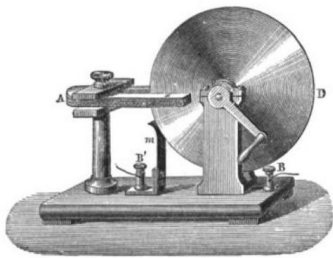
$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{allt rum}} |\mathbf{B}|^2 \, dv$$

Bestämning av induktanser med hjälp av magnetiska energin

I och med att energin i (0.1) också kan fås från (0.2), så kan vi bestämma induktanser genom att först bestämma energin i (0.2). Detta är speciellt användbart när strömmarna är utbredda över ledarens tvärsnitt.

Exempel, induktion — Faradaygeneratoren (kursivt - läs vid intresse)

Faradaygeneratoren består av en metallskiva som roterar i en statisk magnetisk flödestäthet riktad vinkelrätt mot skivan. En yttre resistans R ansluts mellan skivans axel och skivans periferi. Vad blir strömmen igenom resistansen om skivan har radien a och snurrar med vinkelfrekvensen ω ?



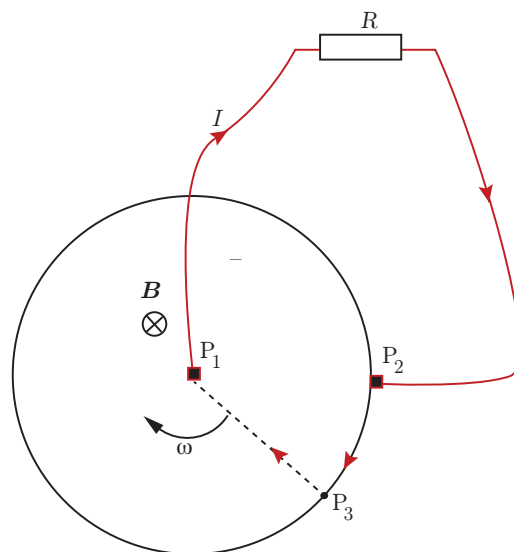
Vi löser uppgiften på två sätt.

Metod 1

Skapa en sluten krets $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$, enligt figur. Den raka linjen $P_3 \rightarrow P_1$ ligger fast på skivan och rör sig med denna. Laddningsbärarna på skivan känner av en kraft

$$\mathbf{F}_i = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

där laddningsbärarnas hastighet är \mathbf{v} (deras hastighet i radiell led är försumbar) och deras laddning är q .



Hastigheten och den magnetiska flödestätheten i cylinderkoordinater är

$$\mathbf{v} = \omega r_c \hat{\phi}, \quad \mathbf{B} = B \hat{z}$$

och kraften på en laddning som befinner sig på avståndet r_c från axeln blir

$$\mathbf{F}_i = q\omega r_c B \hat{\phi} \times \hat{z} = q\omega r_c B \hat{r}_c$$

Den elektromotoriska kraften \mathcal{E} är

$$\mathcal{E} = \int_{P_3 \rightarrow P_1} \frac{\mathbf{F}_i}{q} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_0^a \omega r_c B \hat{r}_c \cdot \hat{r}_c dr_c = -\frac{1}{2} \omega a^2 B$$

där integralens riktning är i pilarnas riktning. Det ger strömmen

$$I = -\frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{2R} \omega a^2 B$$

Metod 2

Den slutna slingan $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1$ har ett magnetiskt flöde som varierar med tiden:

Flödet $\Phi(t)$ består av en konstant del Φ_0 och en del som ökar linjärt med tiden:

$$\Phi(t) = \Phi_0 + 0.5\omega t a^2 B$$

eftersom ytan som den raka linjen sveper förbi under tiden t är $0.5\omega t a^2$ (på periodtiden T går den runt ett helt varv och har då svept över ytan $0.5\omega T a^2 = \pi a^2$).

Vi får då den inducerade emk:n

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{1}{2} \omega a^2 B$$

och strömmen¹

$$I = -\frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{2R} \omega a^2 B$$

¹Griffiths argumenterar att man inte kan använda metod 2 eftersom det kräver att strömmen flyter längs en väldefinierad kurva. Det är inte helt korrekt eftersom $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$ även gäller för en matematisk kurva \mathcal{C} .