Föreläsning 8

7.1 i Griffiths

Ohms lag (Kap. 7.1)

Vi har stiftat bekantskap med Ohms lag tidigare i kursen. Den är också känd på formen $V = RI$ från kretsteorin, där R är resistans. Nu ska vi visa hur man använder Ohms lag för att kunna bestämma resistanser. I allmänhet gäller:

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{f}$$

där σ är konduktiviteten (enhet $1/(\Omega\text{m})$=S/m) och $\boldsymbol{F}$ är kraften per enhetsladdning som behövs att knuffa igång strömmen $\boldsymbol{J}$. Men kraft per enhetsladdning är elektriskt fält, så då får vi följande samband mellan strömtätheten $\boldsymbol{J}$ och den elektriska fältstyrkan $\boldsymbol{E}$ är enligt Ohms lag

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

För metaller är σ av storleksordningen 10^7 S/m. För saltvatten är $\sigma \approx 4$ S/m. För goda isolatorer är σ av storleksordningen 10^{-15} S/m. $1/\sigma$ kallas materialets resistivitet [Ωm]

Ansluter vi två elektroder till ett ledande objekt och lägger en spänning V mellan elektroderna, kommer det att flyta en ström I mellan elektroderna. Resistansen mellan elektroderna definieras då som

$$R = V/I$$

Bestämning av resistansen för rak ledare (Ex. 7.1 i Griffiths)

Antag en rak solid ledare med längd L, tvärsnittsyta A och konduktivitet σ. Driv en ström I genom ledaren och bestäm spänningen V_0 över ledaren.

Eftersom strömmen är jämnt fördelad över tvärsnittsytan fås strömtätheten

$$\boldsymbol{J} = \frac{I}{A}\hat{\boldsymbol{z}}$$

Det elektriska fältet ges av $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\sigma$. Därmed fås spänningen

$$V_0 = \int_0^L \boldsymbol{E} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} dz = \frac{IL}{\sigma A}$$

och resistansen

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{L}{\sigma A}$$

Bestämning av resistansen mellan två sfäriska metallskal

Antag två tunna koncentriska metallskal (d.v.s. med gemensamt centrum) med radierna a och $2a$. Området mellan metallskalen är fyllda med ett ledande material med konduktiviteten σ, som antas vara betydligt mindre än metallskalens konduktivitet. Bestäm resistansen R mellan skalen.

Vi kan lösa problemet på ett antal olika sätt.

Metod 1: Antag en spänning V_0 på inre skalet och potentialen 0 på yttre skalet. Mellan skalen gäller Laplace ekvation $\nabla^2 V(r) = 0$. Eftersom vi inte har någor θ- eller ϕ-beroende gäller i sfäriska koordinater

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0, \quad \text{då}\, a < r < 2a$$

Genom att integrera ekvationen två gånger fås lösningen

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta$$

Randvillkoren ger $\alpha = -2aV_0$ och $\beta = -V_0$. Elektriska fältet ges av

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} = \frac{2aV_0}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

Låt S vara en sfär med radien r, $a < r < 2a$. Strömmen mellan skalen ges av

$$I = \oint_S \boldsymbol{J}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}dS = \sigma\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}dS = \frac{2a\sigma V_0}{r^2}4\pi r^2 = 8\pi\sigma a V_0$$

Resistansen blir

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{8\pi\sigma a}$$

Metod 2: Antag en ström I mellan skalen. Strömtätheten mellan sfärerna ges av $\boldsymbol{J} = I/(4\pi r^2)\hat{\boldsymbol{r}}$. Det elektriska fältet ges av $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{J}/\sigma$. Spänningen mellan skalen fås av

$$V_0 = \int_a^{2a}\boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}dr = I/(8\pi\sigma a)$$

Resistansen blir $R = V_0/I = 1/(8\pi\sigma a)$.

Metod 3: Dela in området mellan metallskalen i ett stort antal sfäriska skal med tjocklek Δr. Enligt formeln för resistansen för en rak ledare ges resistansen för ett skal av

$$\Delta R = \frac{1}{\sigma A}\Delta r = \frac{1}{\sigma 4\pi r^2}\Delta r$$

Seriekoppling av alla resistanserna ger då $\Delta r \to 0$

$$R = \int_a^{2a}\frac{1}{\sigma 4\pi r^2}\,dr = \frac{1}{8\pi\sigma a}$$

Effektutveckling (Kap. 7.1.1)

Antag att det finns N laddningsbärare/v.e., som har hastighet $\boldsymbol{v}$ och laddning q.

Arbetet som ett elektriskt fält $\boldsymbol{E}$ utför på varje laddningsbärare vid en förflyttning $\Delta\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{v}\Delta t$ är

$$\Delta W = q\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{\ell} = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}\Delta t$$

Effekten blir

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$$

Totalt i volymen V får vi effektutvecklingen P

$$P = \iiint_V q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}N \, \mathrm{d}v = \iiint_V \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}v$$

Detta motsvarar följande relation i elkretsen

$$P = VI = I^2R$$

Faradays lag (Kap. 7.2.1)

Vi tar induktion i en liten annan ordning än Griffiths. Griffiths skiljer på det han kallar för "motional emk" och "induced emk". Efter en längre diskussion kommer han fram till att dessa är desamma. Vi tar en liten genväg och börjar med att postulera induktionslagen på differentiell form

$$\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t}$$

Lagen är en av Maxwells ekvationer, den upptäcktes av Michael Faraday 1831 och kallas också Faradays lag. Den säger att när ett magnetfält varierar i tiden induceras ett elektriskt fält. Stoppar vi in en metallslinga i ett sådant magnetfält kommer det inducerade elektriska fältet att ge upphov till en ström i slingan.

När fälten varierar i tiden är det elektriska fältet inte längre konservativt. Det gör att mycket av det vi använde i elektrostatiken inte längre fungerar. I elektrostatiken kunde vi skriva elektriska fältet som minus gradienten av den elektriska potentialen. Det gäller inte längre! Det betyder att tangentlinjeintegralen av $\boldsymbol{E}$ mellan två punkter beror på valet av integrationsväg.

Trots detta kan vi införa en elektrisk potential V. Vi utnyttjar att $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ och att $\boldsymbol{B}$ då kan skrivas

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{0.1}$$

där $\boldsymbol{A}$ är den magnetiska vektorpotentialen, se magnetostatiken. Relationen (0.1) gäller alltid! Sätter vi in (0.1) i Faradays lag får vi

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = \boldsymbol{0}$$

Det betyder att $\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ är ett konservativt fält och därmed kan skrivas som gradienten av en skalär potential:

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla V$$
$$\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

Ovanstående kallas ofta för "Lorenz gauge" eller Lorenzvillkoret.

Elektromotorisk kraft (Kap. 7.1.2)

Den elektromotoriska kraften $\mathcal{E}$ för en sluten slinga $\mathcal{C}$ definieras av

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{C}} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

O.B.S. att $\mathcal{E}$ har dimensionen V (som spänning) fast den kallas kraft. Man kan se relationen ovan som kraften per enhetsladdning som behövs för att driva en ström i en slinga $\mathcal{C}$ oavsett orsak (rörelse genom magnetfält, tidsföränderligt magnetfält o.s.v). Hastigheten $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ är slingans hastighet i en punkt $\boldsymbol{r}$ på slingan.

Om slingan står stilla är $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Stokes sats och induktionslagen ger i så fall

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}},$$

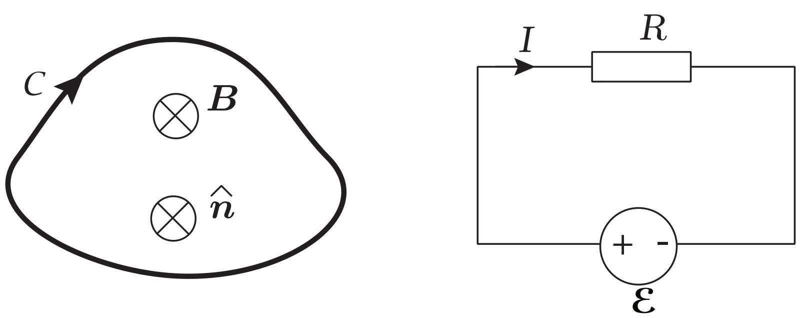
där $\Phi(t)$ är det tidsföränderliga magnetiska flödet genom $\mathcal{C}$. Riktningen på $\hat{\boldsymbol{n}}$ är relaterad till omloppsriktningen på $\mathcal{C}$ via skruvregeln.

Det visar sig att även när slingan rör sig med en hastighet $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$, gäller

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}},$$

se Griffiths.

Hur tolkas $\mathcal{E}$? Vi har två viktiga fall där tolkningen är relativt rättfram. Det första fallet är att $\mathcal{C}$ går längs en sluten stillastående ($\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) ledande slinga i vilken det kan flyta en ström, se vänstra delen av figuren nedan.

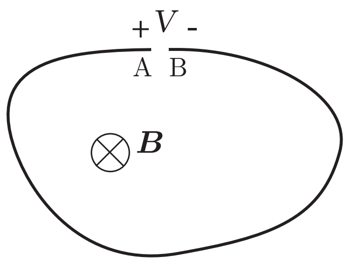


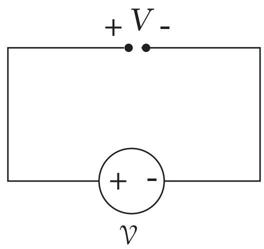
Ledaren har en liten tvärsnittsyta $A(\boldsymbol{r})$ (OBS! Ej att förväxla med vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$!) och en konduktivitetet $\sigma(\boldsymbol{r})$ som kan variera längs $\mathcal{C}$. Strömmen I måste vara densamma runt hela slingan (Kirchhoffs strömlag) och eftersom $A(\boldsymbol{r})$ är liten och $\boldsymbol{J}$ är riktad i tangentens riktning gäller $\boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \approx \frac{I}{A} \mathrm{d}\ell$. Ohms lag ger nu

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{r})} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{A(\boldsymbol{r})\sigma(\boldsymbol{r})} \mathrm{d}\ell = RI$$

där R är slingans resistans. $\mathcal{E}$ fungerar uppenbarligen som en spänningskälla med spänning $\mathcal{E}$ i en sluten krets. Trots att både $\mathcal{E}$ och R är utbredda kan man alltid rita in $\mathcal{E}$ som en spänningskälla och R som en resistans i den ekvivalenta kretsen, se den högra delen av figuren. Polariteten på källan skall vara sådan att den driver strömmen i $\mathcal{C}$:s omloppsriktning.

I det andra fallet är slingan nästan sluten, men det finns ett litet luftgap δ mellan de två ändarna, se den vänstra figuren nedan.





Då gäller

$$\mathcal{E} = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \tag{0.2}$$

där $\mathcal{C}_1$ är den del av $\mathcal{C}$ som går längs ledaren och $\mathcal{C}_2$ är den del som utgör gapet. Gapet gör att det inte går någon ström i slingan[1] Det innebär att $\boldsymbol{J} = \mathbf{0}$ och därmed är även $\boldsymbol{E} = \mathbf{0}$ i ledaren längs $\mathcal{C}_1$. Den inducerade emk:n reduceras till

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

Vi använder nu relationen $\boldsymbol{E} = -\nabla V - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Den första termen $-\nabla V$ har laddningar som sin källa, och eftersom laddningarna ansamlas vid ändarna, är denna term stor i gapet. Den andra termen är någorlunda jämnt fördelad över $\mathcal{C}$, eftersom den bara är relaterad till magnetfältets variation i tiden. Den kan därför anses vara försumbar i integralen över $\mathcal{C}_2$. Det ger

$$\mathcal{E} \approx -\int_{\mathcal{C}_2} \nabla V(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = \text{Spänningen mellan A och B} \tag{0.3}$$

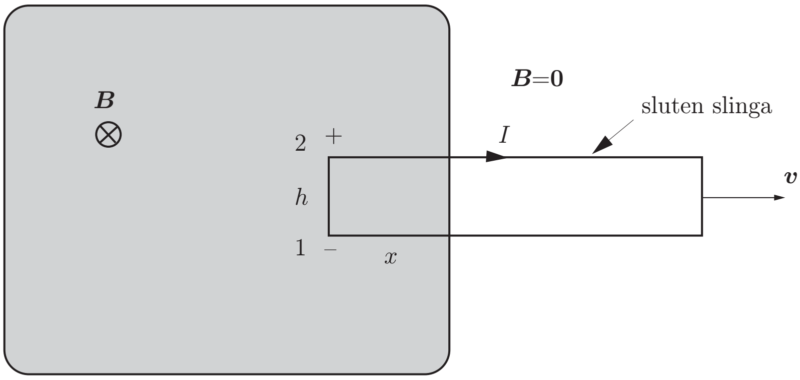
[1] Vi antar att kapacitansen mellan ändarna är försumbar.

Ett annat sätt att får fram detta är att tänka sig gapet som en oändlig resistans i kretsschemat ovan. Kirchhoffs spänningslag ger då att $V = \mathcal{E}$ och vi får kretsmodellen i den högra figuren nedan. Notera att det är viktigt att A och B och därmed $+$ och $-$ sitter på rätt ställe i gapet.

Man kan visa att relationerna (0.2) och (0.3) även gäller när slingorna rör sig eller ändrar form.

Exempel

I den mörka partiet finns en konstant magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$ riktad vinkelrätt in mot pappret. Slingan har resistansen R och rör sig åt höger med hastigheten $\boldsymbol{v}$. Avståndet x anger hur stor del av slingan som befinner i magnetfältet.



Magnetiska flödet genom slingan är:

$$\Phi(t) = \iint \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = Bhx = Bh(x_0 - vt)$$

där $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad in mot pappret, h är slingans höjd och x_0 är värdet av x vid $t = 0$.

Den inducerade emk:n i slingan blir:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{dt}} = Bhv.$$

Det ger strömmen

$$I = \frac{Bhv}{R}$$

riktad i pilens riktning (riktningen av förflyttningen av slingan, $\boldsymbol{v}$).

Lentz lag

Lentz lag säger att den inducerade emk:n vill driva en ström i en sådan riktning att den motverkar förändringen av flödet genom slingan.

Vi ser i exemplet ovan att flödet Φ minskar med ökande t. Strömmen I skall då vara riktad så att den vill öka flödet. Det stämmer, eftersom I blev positiv.