Föreläsning 7

6.1–6.3 i Griffiths

Kraft på magnetisk dipol (Kap. 6.1.2)

En partikel med laddning q som rör sig med hastigheten $\boldsymbol{v}$ i en magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$ känner av Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Från Lorentzkraften följer att kraften på en ledare med ström I ges av uttrycket

$$\boldsymbol{F} = I \int d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$$

I ett homogent fält $\boldsymbol{B}$, blir den totala kraften på slingan noll.

$$\boldsymbol{F} = I \left(\int \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \right) \times \boldsymbol{B} = \mathbf{0}$$

Om ledaren är rak med längd L och för strömmen I i positiv z-led, och magnetfältet är konstant och givet av $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, ges kraften av BIL formeln

$$\boldsymbol{F} = BIL\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\alpha}}$$

En slinga i ett homogent fält ($\boldsymbol{B}$ konstant) har nettokraften noll. Är däremot fältet $\boldsymbol{B}$ inhomogent, får vi nettokraften

$$\boldsymbol{F} = \nabla(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B})$$

där slingans magnetiska dipolmoment $\boldsymbol{m}$ är

$$\boldsymbol{m} = I \int_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$$

Jämför med motsvarande uttryck i el.-statiken (visa gärna sista likheten själv!)

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} = \nabla(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$$

Moment på magnetisk dipol (Kap. 6.1.2)

För en sluten slinga leder den magnetiska kraften till ett vridmoment. Antag en plan slinga, med ström I, som spänner upp ytan S. Om magnetfältet är homogent blir totala kraften på slingan noll. Däremot utsätts slingan för ett vridmoment

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

där $\boldsymbol{m}$ är slingans magnetiska dipolmoment.

Magnetiska fält i material (Kap. 6.1.4 & 6.2)

Elektroner och atomkärnor har inre magnetiska dipolmoment. Dessutom skapas ett magnetiskt dipolmoment då elektronerna rör sig kring atomkärnan. Atomer är alltså magnetiska dipoler. Vårt mål är en makroskopisk modell av deras effekt på den magnetiska flödestätheten.

Vi använder en modell där varje atom bidrar med ett magnetiskt dipolfält $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})_{\text{dip}}$ till den totala vektorpotentialen $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ i mätpunkten, som antas vara utanför materialet. Totala potentialen från alla dipolbidrag från materialets atomer (magnetiskt dipolmoment $\boldsymbol{m}_i$ i punkten $\boldsymbol{r}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) blir

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{m}_i \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}v'$$

där materialets **magnetisering** $\boldsymbol{M}$ betecknar den magnetiska dipolmomenttätheten (totalt magnetiskt dipolmoment per volymsenhet, $\boldsymbol{M} = \mathrm{d}\boldsymbol{m}/\,\mathrm{d}v$). Totala magnetiska dipolmomentet i en volym med magnetiseringen $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$ är då

$$\boldsymbol{m} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}v$$

En omskrivning av uttrycket för vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ blir då

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}') \times \hat{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}S' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \, \mathrm{d}v'$$

och vi identifierar två (ekvivalenta) strömfördelningar

1. **Ytströmtäthet** från bundna strömmar: $\boldsymbol{J}_{\text{bS}} = \boldsymbol{M} \times \hat{\boldsymbol{n}}$

2. **Volymströmtäthet** från bundna strömmar: $\boldsymbol{J}_{\text{b}} = \nabla \times \boldsymbol{M}$

Det betyder att vektorpotentialen från magnetiseringen $\boldsymbol{M}$ är densamma som vektorpotentialen från den ekvivalenta ytströmtätheten och volymströmtätheten. Notera att $\nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\text{b}} = \boldsymbol{0}$ (stationära strömmar).

Magnetfältet $\boldsymbol{H}$ (Kap. 6.3)

Den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ genereras av alla strömmar i materialet. Den matematiska relationen kan skrivas genom Ampères lag $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$. Den totala strömtätheten $\boldsymbol{J}$ består av två delar, dels fria strömmar $\boldsymbol{J}_{\text{f}}$, och dels bundna strömmar $\boldsymbol{J}_{\text{b}} = \nabla \times \boldsymbol{M}$, där $\boldsymbol{M}$ är materialets magnetisering. Vi får

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_{\text{f}} + \boldsymbol{J}_{\text{b}}\right) = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_{\text{f}} + \nabla \times \boldsymbol{M}\right)$$

eller

$$\nabla \times (\boldsymbol{B} - \mu_0 \boldsymbol{M}) = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\text{f}}$$

Om vi nu inför den magnetiska fältstyrkan $\boldsymbol{H}$, får vi

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$$

och Ampères lag blir

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{f}}$$

eller i integralform

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \text{den fria ström som går genom } S$$

Linjära magnetiska material (Kap. 6.4.1)

För ett linjärt material, är magnetiseringen proportionellt mot magnetfältet $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

där χ_m är en dimensionslös materialkonstant som kallas den *magnetiska susceptibiliteten*. Konstanten talar om hur mycket materialet magnetiseras.

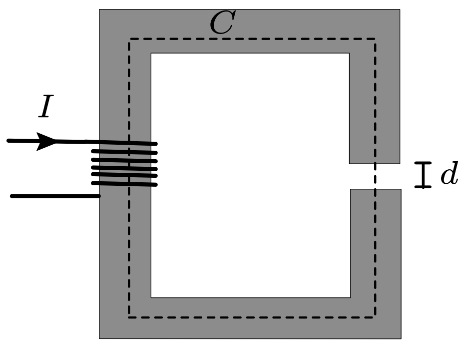
Detta ger att

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H}$$

där $\mu_{\mathrm{r}} = 1 + \chi_m =$ är den *relativa permeabiliteten* (dimensionslöst tal), och $\mu = \mu_0\mu_{\mathrm{r}} =$ är den absoluta permeabiliteten.

Den relativa permeabiliteten μ_r är en dimensionslös storhet som för de flesta material ligger mycket nära ett. För ferromagnetiska material (järn, nickel och kobolt) är det dock betydligt större (100-1000).

Exempel: Magnetiska kretsar



Magnetiska kretsar består av järnkärnor med mycket stora μ_r, och spolar som är lindade runt dessa kärnor. Strömmar i spolarna genererar magnetfält som kan ledas längs järnkärnorna. I följande exempel visar vi hur man på detta sätt kan skapa de magnetfält som används för att böja av banan för en partikelstråle i en accelerator. I figuren är den grå delen järn och den vita luft. Luftspaltens längd d är liten. Järnets relativa permeabilitet μ_{r} är såpass stor, att läckaget av magnetiskt flöde från järnkärnan kan anses vara försumbart. Ampères lag ger

$$NI = \oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}, \tag{0.1}$$

där C är den slutna kurvan i figuren, N antalet lindningsvarv i spolen och I är strömmen som går igenom spolen. Normalkomponenten av den magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ är alltid kontinuerlig över en yta. Således är det ungefär samma magnetiska flöde i järnet som i luftgapet. Vi kan nu anta att längs C är $\boldsymbol{H}$ riktat längs med C, och att absolutbeloppet av $\boldsymbol{H}$ har det konstanta värdet $H_{\text{järn}}$ i järnet och H_{luft} i luften. Integralen (0.1) kan därmed lösas och vi får

$$NI = H_{\text{järn}}\ell_{\text{järn}} + H_{\text{luft}}d \tag{0.2}$$

där $\ell_{\text{järn}}$ är längden av den del av C som är i järnkärnan. Insättning av $\boldsymbol{H}_{\text{järn}} = \frac{1}{\mu_0\mu_r}\boldsymbol{B}$ och $\boldsymbol{H}_{\text{luft}} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}$ ger

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\mu_{\text{r}}NI}{d\mu_{\text{r}} + \ell_{\text{järn}}}\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{0.3}$$

De järn man använder i magnetiska kretsar har ofta μ_{r} såpass stort att $d\mu_{\text{r}} \gg \ell_{\text{järn}}$. Det ger den enkla formeln

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 NI}{d}\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{0.4}$$

Olika magnetiska material

Ferromagnetiska material har mycket stort μ_r (100-1000). Det finns dock en gräns för hur stor magnetisk flödestäthet B ett ferromagnetisk material kan ha. Järn och flera typer av järnoxider är ferromagnetiska och de blir mättade vid fältstyrkor på 1-1.5 T. Ferromagnetiska material används för att förstärka den magnetiska flödestätheten. Som exempel kan nämnas att alla elektromagneter som används i MAX IV består av spolar lindande kring järnkärnor.

Ferriter liknar ferromagnetiska material, men har mycket liten elektrisk ledningsförmåga. Detta gör dem användbara för att förstärka tidsvariabla magnetiska flödestätheter. Som vi skall se i nästa vecka, ger tidsvariabla magnetiska flödestätheter upphov till strömmar i ledande material, och dessa strömmar ger effektförluster.

Paramagnetiska material har μ_r strax över ett. De attraheras därmed svagt av en permanentmagnet eller en spole med ström. Paramagnetism genereras av elektronens magnetiska moment i ämnen med atomer där yttersta skalet inte är fullt.

Diamagnetiska material har μ_r strax under ett. Det betyder att de repelleras av en permanentmagnet eller spole med ström. Porolytiskt kol, vismut, silver, bly, koppar och vatten är exempel på diamagnetiska material. Porolytiskt kol är såpass diamagnetiskt att det kan fås att sväva över en permanentmagnet.