Föreläsning 6

Inkluderar kapitel 5.3.4–5.4 i Griffiths.

Magnetostatik (fortsättning)

Vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$

Vi inför vektorpotentialen $\boldsymbol{A}$ genom

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

Insättning i ekvationen ($\star$) ger

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$$

genom att använda identiteten

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$$

Vektorpotentialen är inte entydigt given. Därmed kan man välja att lägga till ett godtyckligt $\nabla\lambda$ till $\boldsymbol{A}$, så att $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ ("Coulomb gauge"), vilket medför

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu_0 \boldsymbol{J}$$

(Jämför Poissons ekvation!) I vissa fall är denna ekvation mycket användbar för att bestämma det magnetiska fältet från en strömtäthet.

Vi kan även beräkna det magnetiska flödet Φ genom både $\boldsymbol{A}$ och $\boldsymbol{B}$

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

Ibland är det enklare att beräkna $\boldsymbol{A}$ och därifrån ta fram $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}, \Phi$ osv än att försöka ge sig på $\boldsymbol{B}$ direkt. **Exempel:** Magnetisk dipol $\boldsymbol{m}$.

Multipolutveckling (Kap. 5.4.3) (kursivt, men bra läsning inför magnetiska dipoler)

I elektrostatiken såg vi att fältet och potentialen från en laddningsfördelning kunde skrivas som en serie av multipoler. Detsamma gäller för den magnetiska flödestätheten och vektorpotentialen från en strömslinga!
Vektorpotentialen från en sluten strömslinga kan på stora avstånd utvecklas i en serie av multipoler

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{I \, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \oint_{\mathcal{C}} r'^{l} P_l(\cos\Theta') \, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'$$

där $\cos\Theta' = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{r}'}$. Termerna i summan benämns

$l = 0$, **monopol**

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})_{\text{mono}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = \boldsymbol{0}$$

$l = 1$, **dipol**

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{\mathcal{C}} r' P_1(\cos\Theta')\, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{r}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}' \tag{0.1}$$

$l = 2$, **kvadrupol**

$l = 3$, **oktopol**

Magnetisk dipol (Kap. 5.4.3)

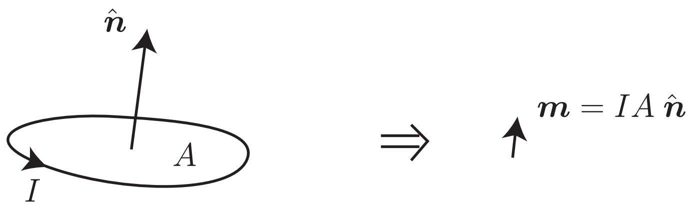
Dipolbidraget kan skrivas som (se bilaga i slutet av denna anteckning)

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{0.2}$$

där **det magnetiska dipolmomentet $\boldsymbol{m}$** definieras genom

$$\boldsymbol{m} = I \int_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S.$$

För en plan slinga gäller att $\boldsymbol{m} = IA\hat{\boldsymbol{n}}$.

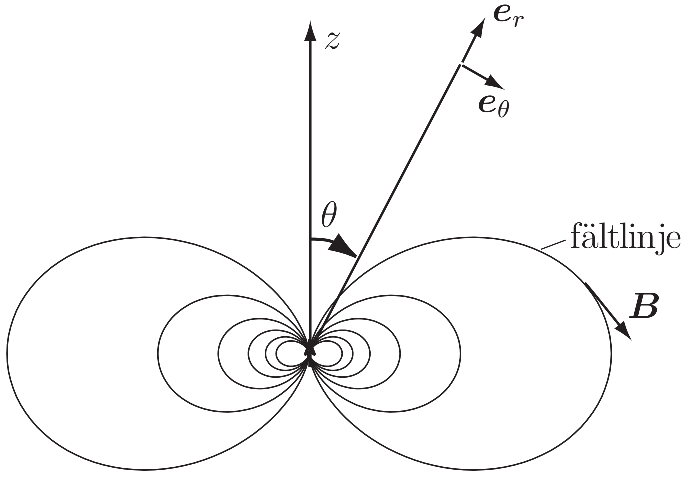


$\boldsymbol{B}$ från magnetisk dipol

Antag att en strömslinga placeras i origo med $\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{z}}$, se figur. Långt bort från slingan är den magnetiska flödestätheten approximativt lika med det magnetiska dipolfältet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}(2\hat{\boldsymbol{r}}\cos\theta + \hat{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta) \tag{$\star\star$}$$

Notera att detta, så när som på konstanten framför, är samma uttryck som det elektriska fältet från en elektrisk dipol!



Kommentar: Fältet i ekvation ($\star\star$) gäller exakt för en matematisk dipol, vilket är en cirkulär slinga med ström $I \to \infty$ och radie $a \to 0$ så att $IA = I\pi a^2 = m$.

Bilaga: Härledning av ekvation (0.2) **(kursivt)**

Vi delar upp vektorpotentialen i dess kartesiska komponenter: $\boldsymbol{A}_{\text{dip}} = (A_x, A_y, A_z)$ där enligt (0.1) $x-$komponenten ges av

$$A_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint_{\mathcal{C}} (\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}')\hat{\boldsymbol{x}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}'$$

Högerledet skrivs om med Stokes sats:

$$A_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S \nabla' \times (\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}')) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S'$$

där S är ytan som spänns upp av kurvan $\mathcal{C}$ och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är riktad enligt skruvregeln. Räkneregler för ∇-operatorn ger

$$\nabla' \times (\hat{\boldsymbol{x}}(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}') = \nabla'(\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}') \times \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{x}}$$

Därmed gäller

$$A_x(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{r}}) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}\, \mathrm{d}S'$$

A_y och A_z fås analogt. Det ger ekvation (0.2), ty $\boldsymbol{m} = I \int_S \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S$,

$$\boldsymbol{A}_{\text{dip}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_S (\hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{r}})\, \mathrm{d}S' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{m} \times \hat{\boldsymbol{r}}}{r^2}$$