Föreläsning 5

Motsvarar avsnitten 5.1–5.3.3, 8.1.1 i Griffiths

Strömmar (Kap. 5.1.3)

Laddningstransport kan ske på flera sätt. Några är:

1. Ledningselektroner (eller hål) i metaller eller halvledare (små hastigheter $\sim 10^{-4}$ m/s, stora mängder)
2. Strömmar i elektrolyter som följd av jontransport i vätskor
3. Strömmar av elektroner eller joner i vakuum eller uttunnade gaser (t.ex. partikelacceleratorer) (stora hastigheter)

I samtliga fall definieras **strömtätheten $\boldsymbol{J}$** som

$$\boldsymbol{J} = Nq\boldsymbol{v}$$

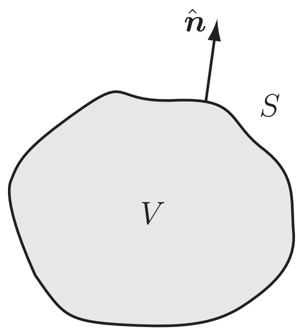
där N är antalet laddningsbärare per volymsenhet, q laddningsbärarnas laddning och $\boldsymbol{v}$ deras hastighet. Strömtätheten $\boldsymbol{J}$ har enheten laddning per ytenhet per tidsenhet (C/m^{2}s eller A/m^2).
Strömmen I genom en yta S (ytnormal $\hat{\boldsymbol{n}}$) är flödet av $\boldsymbol{J}$ genom S.

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

Enheten är Ampere (A).

Kontinuitetsekvationen (laddningens bevarande)

(Detta avsnitt tas också upp i kapitel 7.)



Strömmen ut ur den slutna ytan S:

$$I = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

I är den laddning som försvinner **ut ur** V per tidsenhet. Total laddning i V är

$$Q = \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v$$

Laddningens bevarande (experimentellt faktum):

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

eller med divergenssatsen

$$\iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{J} \, \mathrm{d}v = \iint_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \, \mathrm{d}v = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, \mathrm{d}v$$

Detta ger kontinuitetsekvationen

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Stationära strömmar (inget tidsberoende):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

Exempel: Kirchhoffs stömlag

$$\sum_k i_k = 0$$

Magnetostatik (Kap. 5)

En viktig skillnad mot elstatiken är att det inte finns några magnetiska punktladdningar (det går inte att isolera polerna i en magnet). I magnetostatik gäller att stationära strömmar, $\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$, råder.

Kraftverkan mellan laddningar i rörelse (Kap. 5.1.2)

Magnetisk flödestäthet $\boldsymbol{B}$

Kraften $\boldsymbol{F}$ på en testladdning q med hastighet $\boldsymbol{v}$ ges av Lorentzkraften

$$\boldsymbol{F} = \underbrace{q\boldsymbol{E}}_{\text{el.-statik}} + \underbrace{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}_{\text{magnetiskt}}$$

1. $\boldsymbol{E}$ elektriskt fält (enhet V/m)
2. $\boldsymbol{B}$ magnetisk flödestäthet (enhet T=As/m^2=Wb/m^2)

Kraften $(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \perp \boldsymbol{v}$, vilket medför att kraften inte utför något arbete $\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$.

Kan definiera magnetiska kraftlagen på ett litet segment ström $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ enligt

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_\mathrm{m} = \mathrm{d}q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}}$$

Kommentar: En magnetisk flödestäthet med styrkan 1 Tesla är mycket stark. De allra starkaste permanentmagneterna (t.ex. Neodymmagneter) ger en Tesla. På vår breddgrad är det jordmagnetiska fältet ungefär 57 μT. Vid magnetresonanstomografi används magnetfält med styrkan 3-7 T. I acceleratorn Large Hadron Collider på Cern används mycket starka supraledande elektromagneter för att få de högenergetiska protonerna att gå längs den 27 km långa cirkulära acceleratorn. Dessa magneter ger fältstyrkan 8 T.

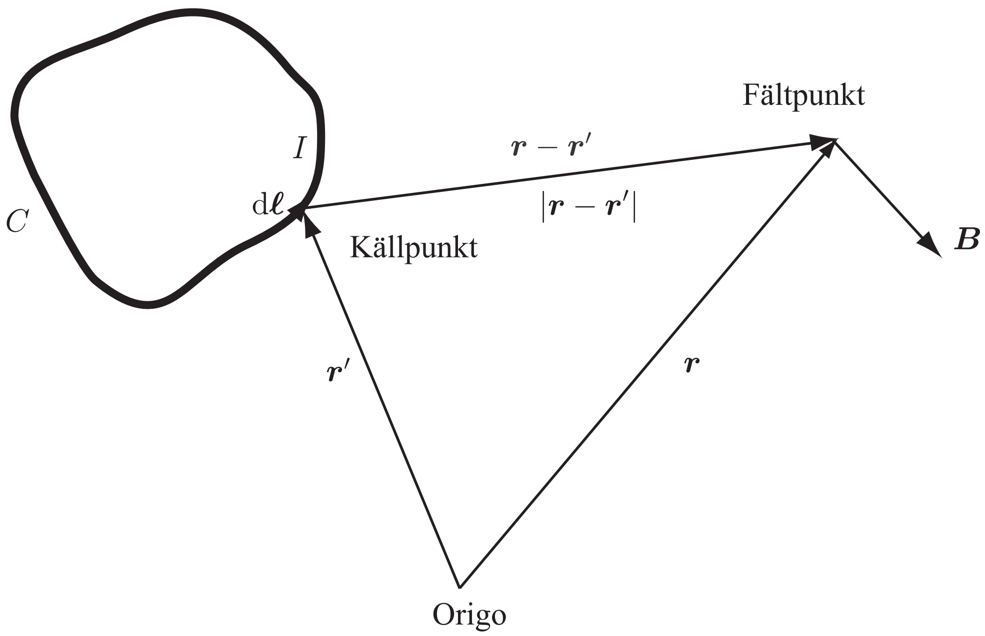
Biot-Savarts lag (Kap. 5.2.2)

Den statiska magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}$ genereras av laddningar i rörelse.

Experimentellt faktum

Biot-Savarts lag är ett postulat med ursprung i experiment som den danske fysikern Hans Christian Ørstedt gjorde 1820 på magnetfält från strömmar i ledningar, och ges som följande integralsamband mellan en ström I i en ledning C och magnetiska flödestätheten $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ kring ledningen:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\boldsymbol{\ell}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \quad \text{(Biot-Savarts lag)}$$



Konstanten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$Vs/Am = H/m (exakt värde) är vakuums permeabilitet. Vi har att sambandet

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} 299792458 \text{ m/s (exakt)}$$

gäller där c_0 är ljushastigheten i vakuum.

Biot-Savarts lag kan generaliseras från linjeströmmar till ett samband mellan $\boldsymbol{B}$ och volymströmtätheten $\boldsymbol{J}$ i en volym $\mathcal{V}$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

Jämför med Coulombs lag

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dv'$$

På samma sätt, gäller för en ytströmtäthet $\boldsymbol{J}_S$ som befinner sig på en yta $\mathcal{S}$ att:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\boldsymbol{J}_S(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dS'$$

Konservation av magnetiskt flöde, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (Kap. 5.3.2)

Från Biot-Savarts lag följer att

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$$

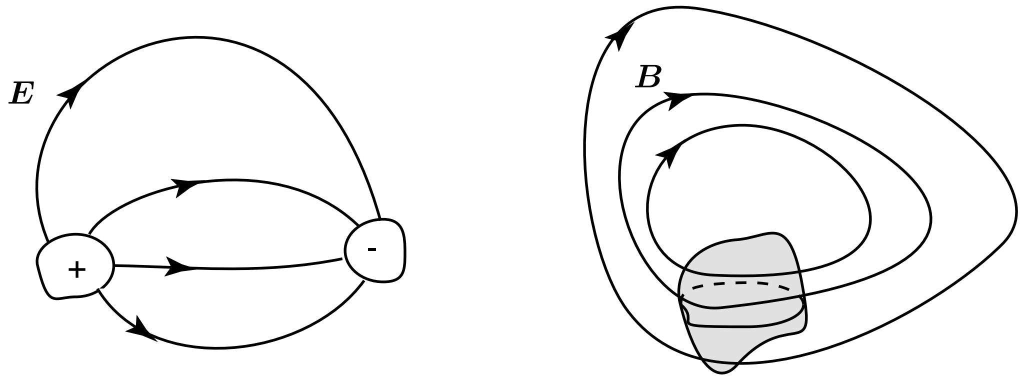
Den magnetiska flödestätheten är alltså divergensfri, vilket är ekvivalent med att det inte finns några magnetiska punktladdningar. En konsekvens av detta samband är att det magnetiska flödet

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S$$

är samma genom alla ytor S som har samma randkurva. Låt $\mathcal{V}$ vara en volym som omsluts av ytan S med utåtriktad normal $\hat{\boldsymbol{n}}$. Eftersom $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$, ger Gauss sats

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \boldsymbol{B} \, \mathrm{d}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_S \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S = 0$$

Det betyder att det är lika mycket flöde in som ut genom en sluten yta S. Det betyder också att alla flödeslinjer bildar slutna banor, se figur.



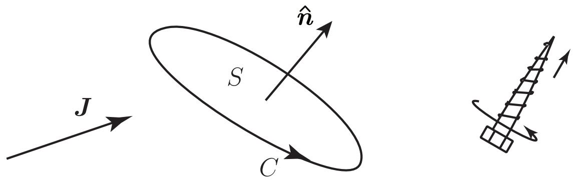
Figur: I elektrostatiken startar de elektriska fältlinjerna på positiva laddningar och slutar på negativa laddningar (vänstra figuren). Magnetiska flödeslinjerna bildar alltid slutna banor, eftersom det inte finns några magnetiska laddningar (högra figuren). Genom varje sluten yta går det in lika många magnetiska flödeslinjer som det går ut.

Ampères lag (Kap. 5.3.2)

Från Biot-Savarts lag följer också att

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \qquad (\star)$$

Det betyder att $\boldsymbol{B}$ inte är ett konservativt fält.



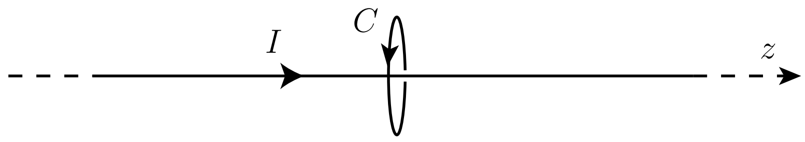
Låt C vara en sluten kurva i rummet som randkurva till ytan S. Omloppsriktningen för C och normalen till S är relaterade via *s*kruvregeln, se figur. Ampères lag ger

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \quad \Rightarrow \quad \int_S (\nabla \times \boldsymbol{B}) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \mu_0 \cdot \text{strömmen genom } S$$

Genom att använda Stokes sats (se vektoranalysen) får vi Ampères lag på integralform

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \int_S \boldsymbol{J} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}S = \mu_0 \cdot \text{strömmen som går genom ytan } S \qquad (\star\star)$$

Exempel: $\boldsymbol{B}$ från en lång rak ledare med ström I. Lägg $z-$axeln längs ledaren, se figur. Av symmetriskäl gäller $\boldsymbol{B} = B(r_c)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Låt C vara en cirkulär slinga koncentriskt kring $z-$axeln. Då fås



$$\oint_C \boldsymbol{B}(r_c) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = B(r_c) 2\pi r_c$$

Alltså ger ekv. ($\star\star$)

$$\boldsymbol{B}(r_c) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_c}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Likt Gauss lag, är Ampères lag främst användbar för <u>vissa symmetrier</u>:

- Oändligt långa raka trådströmmar
- Oändligt stora plan med ytströmtäthet
- Oändligt långa solenoider
- Toroider ("cirkulära solenoider")

I samtliga fall ovan utnyttjas att $\boldsymbol{B}$ och $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ är parallella mot varandra ($\boldsymbol{B}$ har konstant värde på varje kurva C), att $\boldsymbol{B}$ och $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ är vinkelräta mot varandra på C, eller så utnyttjas att $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = 0$ längs någon del av linjeintegralen.