

Föreläsning 4

Motsvarar avsnitten 4.1–4.4.

Elektriska fält i material (Kap. 4)

Två ideala material behandlas:

1. **Ledare** (metaller) kännetecknas av fria, lätt rörliga laddningsbärare
2. **Isolatorer** (dielektrika) saknar fria, lätt rörliga laddningsbärare

I t.ex. en molekyl kan laddningar inte förflytta sig fritt, men de kan "förskjutas" lite grann $\Rightarrow$ polariseras! Molekylen får då ett inducerat dipolmoment $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}$.

Exempel på elektriska dipoler: H₂O-molekyler.

Kraftverkan på dipoler (Kap. 4.1.3)

1. **Vridmoment** $\mathbf{N}$ på elektrisk elementardipol $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$$

Givet ett externt fält $\mathbf{E}$, vill $\mathbf{p}$ vill "ställa in sig" i $\mathbf{E}$:s riktning.

2. **Kraften** $\mathbf{F}$ på en elektrisk elementardipol $\mathbf{p}$ i ett homogent fält är noll, men i ett inhomogent fält $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ får vi en resulterande kraft:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

Modell av ett isolatormaterial (Kap. 4.2)

Vad händer om vi har ett stycke material, istället för enskilda (elektriskt neutrala) molekyler? Vi använder en modell där varje atom bidrar med ett dipolfält $V(\mathbf{r})_{\text{dip}}$ till den totala potentialen $V(\mathbf{r})$ i mätpunkten, som vi antar ligger utanför materialet i vakuum. Totala potentialen från alla dipolbidrag från materialets atomer (elektriskt dipolmoment $\mathbf{p}_i$ i punkten $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) blir

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{p}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \longrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

där **polarisationen** $\mathbf{P} = \Delta \mathbf{p} / \Delta v$ betecknar den elektriska dipolmomenttätheten (totalt elektriskt dipolmoment per volymsenhet). Totala elektriska dipolmomentet i en volym med polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ är då

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{P}(\mathbf{r}) dv$$

Omskrivning med divergenssatsen ger

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

och vi identifierar två (ekvivalenta) laddningsfördelningar

1. **Ytladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_{ps} = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
2. **Rymdladdningstäthet** från bundna laddningar: $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$

Kommentar: Griffiths betecknar den bundna polarisationsyt-laddningen med σ_b .

Det betyder att potentialen från polarisationen $\mathbf{P}$ är densamma som potentialen från den ekvivalenta rymd- och ytladdningen. Observera att när man polariserar ett neutralt dielektrikum, förskjuts laddningarna men totalladdningen är fortfarande noll. Prova gärna med hjälp av definitionerna 1 och 2 ovan att visa att den totala bundna yt- och volym-laddningen alltid försvinner (Griffiths Problem 4.14)!

Elektrisk flödestäthet $\mathbf{D}$ (Electric displacement) (Kap. 4.3)

Det elektriska fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ genereras av alla laddningar, oavsett om de är fria eller är bundna till atomer och molekyler. Polarisationen $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ är dipolmoment per volymsenhet och är, via punkterna 1 och 2 ovan, relaterad till de laddningar som är bundna. Vi inför nu den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}(\mathbf{r})$. Denna är relaterad till alla fria laddningar, d.v.s. laddningar som inte är bundna till atomer eller molekyler. Vi kommer strax att eliminera $\mathbf{P}$ och enbart använda $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ och $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ när vi bestämmer elektriska fält och potentialer.

Den totala laddningstätheten är en summa av den fria laddningstätheten ρ_f och den bundna laddningstätheten ρ_p

$$\rho = \rho_f + \rho_p$$

Som vi sett tidigare relaterar Gauss lag den totala laddningstätheten $\rho(\mathbf{r})$ till det elektriska fältet. Polarisationen ger upphov till en ekvivalent bunden rymdladdningstäthet via relationen $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Gauss lag kan då skrivas

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 = (\rho_f + \rho_p)/\epsilon_0 = (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P})/\epsilon_0$$

Vi skriver detta som

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

Vi definierar den elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ genom

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Fältet $\mathbf{D}$ inbegriper alltså både effekter av externt fält $\mathbf{E}$ och polarisationsfältet $\mathbf{P}$. Divergensen av $\mathbf{D}$ ger en ny form av Gauss lag

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f}$$

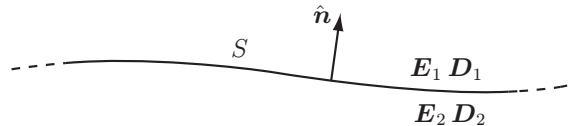
Integralformulering av Gauss lag

$$\boxed{\iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q_f}$$

där Q_f är den totalt inneslutna fria laddningen i S .

Randvillkor för $\mathbf{E}$ och $\mathbf{D}$

Låt S vara skiljeytan mellan två områden med olika material. På ytan S kan det finnas en (fri) ytladdningstäthet ρ_S . Då gäller följande randvillkor för $\mathbf{E}$ och $\mathbf{D}$:



Tangentialkomponenten av $\mathbf{E}$ är alltid kontinuerlig över S , dvs

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

(i formelsamlingen skrivs att E_t är kontinuerlig). För $\mathbf{D}$ är det dock det omvända. Normalkomponenten av $\mathbf{D}$ uppfyller

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1(\mathbf{r}) - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_2(\mathbf{r}) = \rho_S(\mathbf{r}) \quad (\text{fri ytladdningstäthet})$$

så att för ett material utan fri ytladdningstäthet, gäller att normalkomponenten av flödestätheten $\mathbf{D}$ är kontinuerlig över S .

Randvillkor vid ytor till ledare

I en ledande kropp som inte är kopplad till några spänningskällor är det elektriska fältet noll överallt. Därmed är också potentialen konstant i och på en ledande kropp. Om den ledande kroppen begränsas av ytan S , så gäller på ytan att

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 &= \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_1 &= \rho_S\end{aligned}$$

Linjära dielektrikum (Kap. 4.4)

Ett dielektrikum är ett material där en polarisation $\mathbf{P}$ kan induceras av ett elektriskt fält. Om det pålagda fältet inte är extremt starkt, brukar materialet vara linjärt (det finns undantag). Då gäller att polarisationen är proportionell mot det pålagda elektriska fältet

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

där χ_e är en dimensionslös materialkonstant som kallas den *elektriska susceptibiliteten*. Konstanten talar om hur mycket materialet polariseras. Mellan elektriska flödestätheten $\mathbf{D}$ och polarisationen $\mathbf{P}$ råder följande samband:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

där $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$ är den *relativa permittiviteten* (dimensionslöst tal), och $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ är den absoluta permittiviteten.

Exempel: Vattenmolekylen har ett permanent dipolmoment, och den kan lätt ställa in sig i det elektriska fältets riktning. Därför är susceptibiliteten för vatten mycket stor, $\chi_e = 80$. Fasta material brukar ha betydligt mindre värden på susceptibiliteten.

Elektrostatisk energi (Kap. 4.4.3)

För laddningar i vakuum gäller sedan tidigare:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \, dv$$

Uttrycket modifieras av polarisationen i material, till

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) \, dv = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \, dv$$

Serie- och parallellkoppling av kondensatorer

Vi har tidigare stött på plattkondensatorn. Den består av två parallella metallskivor med arean A . Avståndet mellan plattorna betecknas d . Om vi fyller området mellan plattorna med ett dielektrikum med den relativa permittiviteten ε_r , ökar kondensatorns kapacitans med samma faktor. Den ges då av

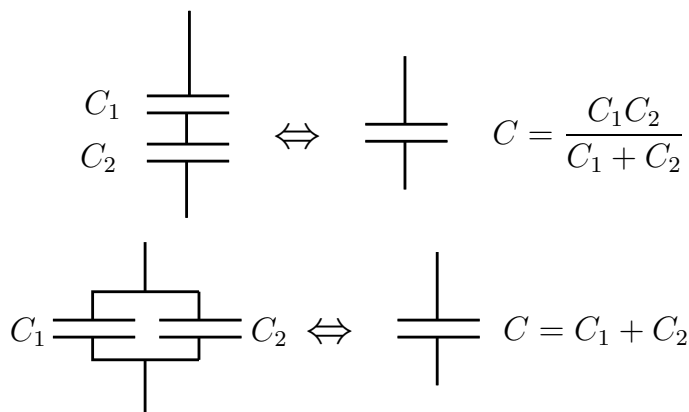
$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

Energien i kondensatorn,

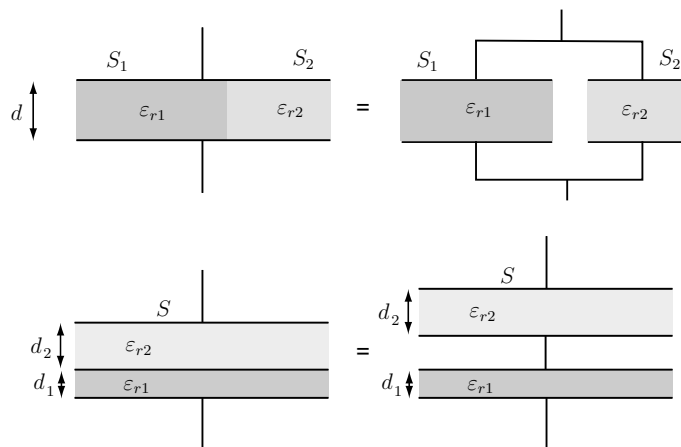
$$W = \frac{1}{2} CV^2$$

boostas med en faktor $\varepsilon_r C_{\text{vakuum}}$. Kan tolkas som att man behöver tillföra mer fri laddning för att uppnå samma potential V , eftersom en del av fältet kancelleras av bundna laddningar (se Griffiths sidan 189-190).

Genom serie- och parallellkoppling kan vi på ett enkelt sätt få fram kapacitansen för en kondensator där utrymmet mellan plattorna är fyllt med flera olika dielektrikum!



Exempel: Ekvivalenta kondensatorer



Repetitionsfrågor

1. Vad är skillnaden mellan fria laddningar och bundna laddningar?
2. Hur påverkas fria laddningar av ett elektriskt fält?
3. Hur påverkas bundna laddningar av ett elektriskt fält?
4. Vad är ett dielektriskt material?
5. Antag att vi lägger in en bit dielektriskt material med konstant permittivitet ϵ_r i ett elektriskt fält.
 - a) Kan det uppstå en rymdladdningstäthet $\rho(\mathbf{r})$ i biten?
 - b) Kan det uppstå en ytladdningstäthet $\rho_s(\mathbf{r})$ på bitens yta?

Svar: 5a) Nej. 5b) Ja.