

Föreläsning 3

Motsvarar avsnitten 3.1–3.2.4, 3.3.2–3.4 i Griffiths

Laplace och Poissons ekvation (Kap. 3.1)

Poissons ekvation erhålls genom att kombinera Gauss lag på differentialform, $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0$, och $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$:

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \nabla V(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0.$$

Randvillkor till Poissons ekvation vid en skiljeyta är:



- i. Elektriska potentialen är kontinuerlig:

$$V_1(\mathbf{r}) - V_2(\mathbf{r}) = 0.$$

- ii. Normalderivatan av elektriska potentialen är diskontinuerlig med språng $-\rho_S/\varepsilon_0$:

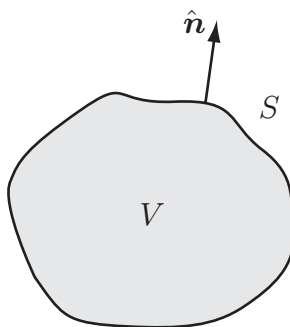
$$\frac{\partial V_1(\mathbf{r})}{\partial n} - \frac{\partial V_2(\mathbf{r})}{\partial n} = -\rho_S(\mathbf{r})/\varepsilon_0$$

I ett område utan elektriska laddningar ρ , satisfierar potentialen Laplace ekvation

$$\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$$

För att kunna lösa Poisson/Laplace ekvationerna entydigt behövs rätt sorts randvillkor på randen till området. De vanligaste randvillkoren är att potentialen är en given konstant på ytan av ledare och att potentialen är noll i oändligheten. Poissons eller Laplace ekvation i områden med ytor där potentialen är given på randen till området kallas för randvärdesproblem. Dessa är ofta svåra att lösa analytiskt eftersom vi inte vet laddningsfördelningarna på ytorna. Det finns dock ett par fall där det finns analytiska lösningar.

Entydighetssatser för elektrostatiska problem (Kap. 3.1.5)



Det finns en uppsättning av entydighetssatser för olika geometrier och olika typer av randvillkor. De som tas upp i Griffiths är:

Fall 1 : Antag en volym $\mathcal{V}$ som omsluts av en yta S med given potential V . Poissons ekvation, $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$, är då entydigt lösbar i $\mathcal{V}$. För bevis, se gärna bokens 3.1.5 (fjärde upplagan).

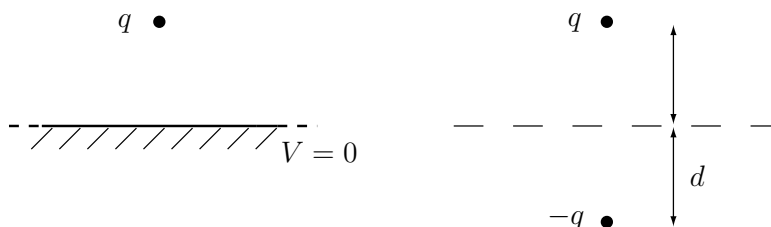
Fall 2: Antag en volym $\mathcal{V}$ utanför ett antal ledande ytor S_n med givna laddningar Q_n . För den yttre yta S_{yttre} som omsluter $\mathcal{V}$ (kan vara i oändligheten) gäller villkoret $\oint_{S_{\text{yttre}}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{tot}}$, där Q_{tot} är totala laddningen innanför S_{yttre} och $\hat{\mathbf{n}}$ är normalen riktad ut från $\mathcal{V}$. Det elektriska fältet är då entydigt givet i $\mathcal{V}$. Entydigheten gäller även när det finns en given rymdladdningstäthet ρ i $\mathcal{V}$. För bevis, se gärna bokens 3.1.6 (fjärde upplagan).

Problem med entydig lösning kan lösas genom att t.ex. gissa eller resonera sig fram till lösningen, under förutsättning att den erhållna lösningen kan visas uppfylla ekvationen och randvillkoren.

Speglingsmetoden

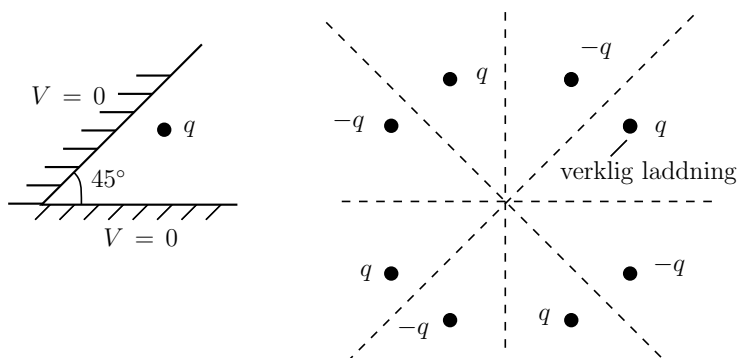
Spegling i plan (Kap. 3.2.1–3.2.3)

En punktladdning befinner sig ovanför ett jordat metallplan. Lösningen till detta problem kan vi få genom att ersätta metallplanet med en spegelladdning enligt figur.



Kommentar: Spegling är ett trick för att på ett enkelt sätt få fram uttryck för det elektriska fältet och potentialen. I verkligheten finns ingen spegelladdning utan de laddningar som finns är punktladdningen och den inducerade ytladdningen på metallplanet. De uttryck för potentialen och fältet som vi får fram med speglingsmetoden gäller endast ovanför metallytan.

Spegling i hörn



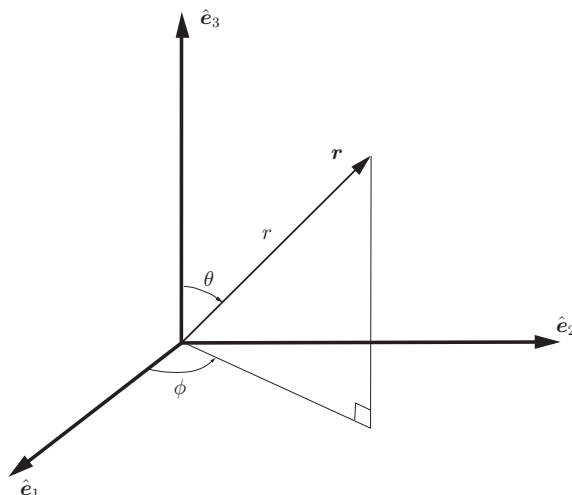
Figur: I hörnet $0 < \phi < 45^\circ$ ger de båda figurerna samma elektriska fält. Randvillkoret $V = 0$ för $\phi = 0$ och $\phi = 45^\circ$ är uppfyllt pga att laddningsfördelningen är antisymmetrisk map linjerna $x = 0$ och $x = y$.

Det går att spegla i ett hörn enligt figur. Det som krävs för att det skall bli ett ändligt antal spegelladdningar är att vinkeln ϕ_0 mellan halvplanen ges av $\phi_0 = \pi/n$ där n är ett positivt heltal.

Spegling i andra geometrier

Det går även att spegla i ledande sfärer och (oändligt) långa cylindrar. Teorin finns i Griffiths för den intresserade, men det finns inte i formelsamlingen och kommer inte på tentan.

Lösning av Laplace ekvation i sfäriska koordinater (Kap. 3.3.2)



Följande två avsnitt är bra introduktion för att förstå multipolutveckling och dipolmoment, men lösning av randvärdesproblem m.h.a. Legendrepolynom kommer inte på tentan.

Antag att vi har ett källfritt område mellan två sfärer, d.v.s. $a \leq r \leq b$ där b kan vara oändlig och a noll. I området gäller $\nabla^2 V(\mathbf{r}) = 0$ för potentialen. Vi kan finna en allmän lösning för $a \leq r \leq b$ genom att uttrycka Laplaceoperatoren i sfäriska koordinater

$$\nabla^2 V(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Den allmänna lösningen fås m.h.a. separationsmetoden, se kursen i kontinuerliga system

$$V(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_l^m r^l + B_l^m r^{-l-1}) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (0.1)$$

där $Y_l^m(\theta, \phi)$ är klotytfunktioner¹ och A_l^m och B_l^m är konstanter. Begränsar vi oss till axialsymmetriska lösningar $V = V(r, \theta)$ förenklas lösningen eftersom den endast kommer att innehålla $m = 0$ termer.

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta) \quad (0.2)$$

där $P_l(x)$ är Legendrepolyomet av grad l , $x \in [-1, 1]$.

Multipolutveckling (Kap. 3.4)

Antag nu en laddningsfördelning $\rho(\mathbf{r})$ som ligger innanför en sfär med radie R . För $r > R$ satsifierar potentialen Laplace ekvation och vi kan skriva den på formen (0.1), eller (0.2) om laddningsfördelningen är axialsymmetrisk. Eftersom $V(\mathbf{r}) \rightarrow 0$ då $r \rightarrow \infty$ är $A_l = 0$ för alla l . För att få fram B_l använder vi följande utveckling för $r > r'$, se Griffiths

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \Theta')$$

där $\cos \Theta' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}'$.² Det leder till

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{r^{l+1}} \rho(\mathbf{r}') r'^l P_l(\cos \Theta') dv'$$

Termerna i summan benämns

$l = 0$, **monopol**

$$V(\mathbf{r})_{\text{mono}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

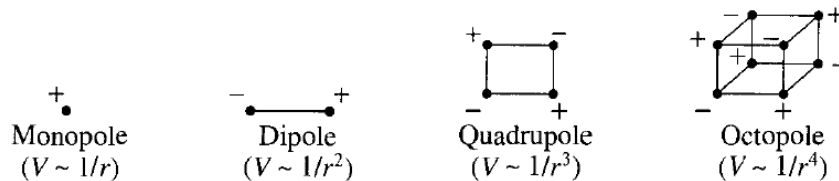
¹ $Y_l^m(\theta, \phi) = C_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$, där $P_l^m(\cos \theta)$ är den associerade Legendrefunktionen av ordning (l, m) och där C_{lm} är en normeringskonstant som gör att $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'*}(\theta, \phi) \sin \theta d\phi d\theta = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
² $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}}$ är Greenfunktionen för Poissons ekvation, se kontinuerliga system.

$l = 1$, **dipol**

$$V(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' \underbrace{P_1(\cos \Theta')}_{\cos \Theta'} dv'$$

$l = 2$, **kvadrupol**

$l = 3$, **oktopol**



Förhoppningen är att de första termerna är lätta att ta fram och dominerande. Ibland är fältet exakt lika med något av momenten och då är alla andra moment noll. Se t.ex. Griffiths Ex. 3.8 (sidan 145-147 i fjärde upplagan).

Elektriska dipoler (Kap. 3.4.2)

Dipoltermen skriver vi om

$$V(\mathbf{r})_{\text{dip}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') r' \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv' = \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

där laddningsfördelningens elektriska dipolmoment definieras som

$$\mathbf{p} = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' dv'$$

Antag två punktladdningar q och $-q$ som befinner sig i punkterna $\mathbf{r}_1$ respektive $\mathbf{r}_2$. Laddningarna bildar då en elektrisk dipol med *dipolmomentet*

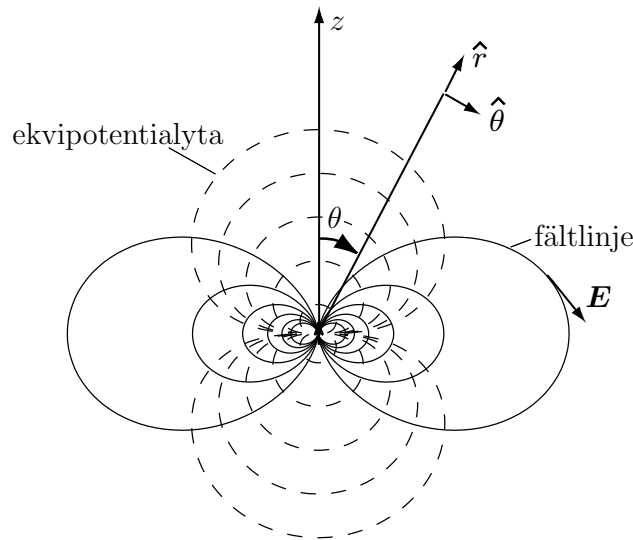
$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = q\mathbf{d} \quad (\star)$$

Om vi har N stycken punktladdningar q_i , $i = 1, 2, \dots, N$ i punkterna $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ definieras dipolmomentet map origo av

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i$$

Det är lätt att visa att $\mathbf{p}$ är oberoende av origos placering om totala laddningen är noll, $\sum_{i=1}^N q_i = 0$.

Elektrisk fält från en punktdipol (Kap. 3.4.4)



Figur: Fältlinjer och ekvipotentialytor för en punktdipol i origo.

En punktdipol med dipolmoment $\mathbf{p}$ får vi om vi låter $\mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$ och $q \rightarrow \infty$ på ett sådant sätt att $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ är ändlig (jämför ekv. (★)).

Potentialen från en punktdipol $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ som befinner sig i origo ges av

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Motsvarande elektriska fält ges av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\hat{\mathbf{r}} - r\mathbf{p}}{r^4} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\hat{\mathbf{r}} \cos \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \sin \theta)$$

där θ är vinkeln mellan z -axeln och radius vektor $\mathbf{r}$, och $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ är de sfäriska enhetsvektorerna, se figuren ovan.

Kommentar: Det elektriska fältet från en punktkälla avtar som kvadraten på avståndet från punktkällan. Det elektriska fältet från en dipol avtar som kubiken på avståndet, dvs en ordning snabbare. Om en laddningsfördelning har totala laddningen Q och det totala dipolmomentet $\mathbf{p}$ kommer dess elektriska fält att långt bort från laddningsfördelningen se ut som fältet från en punktkälla Q . När man närmar sig laddningsfördelningen blir detta en allt sämre approximation och man behöver då lägga till bidraget från dipolfältet. Fältet från en laddningsfördelning med total laddningen noll kan på stora avstånd från laddningsfördelningen approximeras med ett dipolfält.