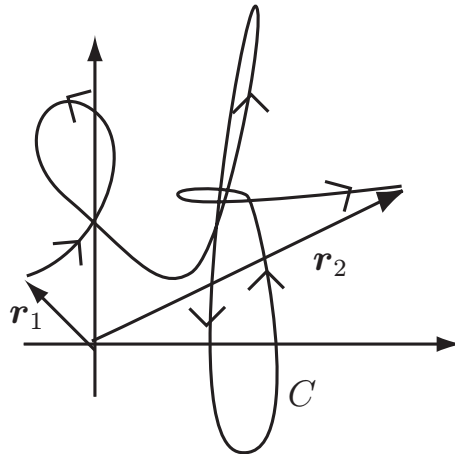


Föreläsning 2

Motsvarar avsnitten 2.4–2.5 i Griffiths.

Arbete och potentiell energi (Kap. 2.4)



Låt W vara det arbete som måste utföras **mot** ett givet elektriskt fält \mathbf{E} , då en laddning Q flyttas längs en kurva C från en punkt \mathbf{r}_1 till en punkt \mathbf{r}_2 .

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\ell = -Q \int_C \mathbf{E} \cdot d\ell = Q (V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1))$$

Arbetet är alltså endast beroende av start- och slutpunkt. Det följer av att det elektriska fältet är konservativt ($\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$).

Kommentar: Vanligtvis sätts potentialen till 0 för $|\mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$. Därmed kan $QV(\mathbf{r})$ tolkas som den potentiella energin hos en laddning Q som befinner sig i en punkt \mathbf{r} .

Elektrostatisk energi hos laddningsfördelningar (Kap. 2.4.2)

Antag ett system med en fördelning av laddningar. Då gäller:

$$\begin{aligned} W_e &= \text{systemets elektrostatiska energi} \\ &= \text{arbetet som krävs för att föra laddningarna från } \infty \text{ till deras lägen} \end{aligned}$$

För ett system med N punktladdningar q_i i punkterna \mathbf{r}_i , $i = 1, 2 \dots N$ gäller

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\mathbf{r}_i) \quad (\star)$$

Här är $V(\mathbf{r}_i)$ potentialen i punkten \mathbf{r}_i från alla laddningar utom q_i .

Kommentar: Vi har tidigare sett att potentiella energin för en punktladdning q i en punkt \mathbf{r} ges av $qV(\mathbf{r})$. Faktorn $1/2$ som dyker upp i ekvation (★) brukar därför förbrylla. Är du intresserad av varför halvan dyker upp kan du läsa igenom härledningen som finns på sidan 92-93 i Griffiths (kapitel 2.4.2 i fjärde upplagan).

Elektrisk energitäthet

Elektriska energin för en laddningstäthet $\rho(\mathbf{r})$ i en volym \mathcal{V}

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r})dv$$

Genom att utnyttja $\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ och $\mathbf{E} = -\nabla V$ samt Gauss sats kan W_e skrivas

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dv$$

där integrationen sker över allt rum där det elektriska fältet är skilt från noll.

Vi kan tolka

$$w_e(\mathbf{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2$$

som den elektriska energitätheten i punkten \mathbf{r} .

Ledare (Kap. 2.5)

Isolatorer

I en isolator kan inte elektronerna röra sig fritt eftersom de är starkt bundna till atomerna. Isolatorn har därmed mycket dålig ledningsförmåga. Exempel på isolatorer är porslin och de flesta plaster. Mer om isolatorer på senare föreläsningar.

Ledare

Ledare är motsatsen till isolatorer. I en ledare finns många elektroner som inte är bundna till en atom utan kan förflytta sig från atom till atom. Detta gör att materialet får bra ledningsförmåga. Många metaller är goda ledare. Om det inte flyter någon ström genom en ledare så gäller i elektrostatiken att:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ inuti ledaren
2. Det kan inte finnas någon rymdladdningstäthet i ledaren, d.v.s. $\rho(\mathbf{r}) = 0$
3. All nettoladdning finns på ytan
4. Det elektriska fältet på metallytan är vinkelrätt mot ytan, d.v.s. $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{n}}$
5. Ytladdningstätheten $\rho_S = \varepsilon_0 E$
6. Alla punkter på och i ledaren har samma potential — ytan är en ekvipotenti-alyta

Mer om ledare på nästa föreläsning om spegling!

Kondensatorer

Två ledare som inte är i kontakt med varandra bildar en kondensator. Om den ena ledaren har laddningen Q och den andra laddningen $-Q$ så är potentialskillnaden mellan ledarna proportionell mot Q

$$Q = CV$$

där C = kondensatorns kapacitans (definition). Kapacitans är en geometri/materialkvantitet, anger hur mycket laddning en kondensator kan lagra givet en fix spänningsskillnad $V(a) - V(b)$ mellan plattorna. Ju större kapacitans desto mer laddning. För att C alltid ska vara positiv, är konventionen att man väljer $V(a) - V(b)$ så att $V(a)$ är potentialen på den positivt laddade ledaren. Se Exempel 1 nedan.

Exempel 1 (Griffiths 2.43): Finn kapacitansen per enhetslängd för en cylindrisk kondensator. Den inre ledaren har radien $r_c = a$ och laddningen $+Q$, medan den yttre ledaren har radien $r_c = b$ och laddningen $-Q$.

Lösning: Vi börjar med att bestämma V , vilket enklast görs via \mathbf{E} som vi kan få fram via Gauss lag. Ansätt en Gaussyta mellan ledarna på radien $a < r_c < b$. Då får vi:

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = E \cdot 2\pi r_c L = \frac{Q_{\text{innanför}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \cdot \frac{1}{r_c} \hat{\mathbf{r}}_c.$$

Spänningsskillnaden blir då

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{1}{r_c} dr_c = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{b}{a},$$

vilket ger kapacitansen

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln b/a}$$

vilket dividerat med L (C /enhetslängd söktes) är svaret.

Exempel 2: En plattkondensator med luft mellan plattorna har kapacitansen

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

där d är avståndet mellan plattorna och A är plattans yta. Prova gärna att härleda detta själva! Antag att $d \ll A$ är uppfyllt och att kanteffekter försummas.

Exempel 3: Den elektriska energin som finns upplagrad i en kondensator med kapacitans C och spänning U ges av

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

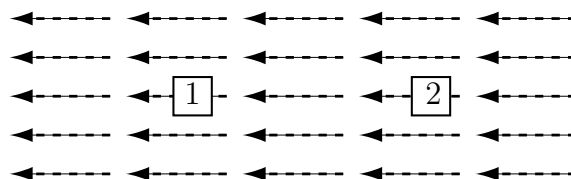
Denna relation finns inte i formelsamlingen men är bra att känna till!

Repetitionsfrågor

Gemensamt för frågorna 1–2

En positiv laddning är placerad i vila i centrum av ett område där det finns ett konstant tredimensionellt elektriskt fält (fältet har alltså konstant riktning och styrka i alla punkter i området).

- Hur kommer laddningen att röra sig om den släpps fri i det elektriska fältet?
 - Den rör sig med konstant fart
 - Den rör sig med konstant hastighet
 - Den rör sig med konstant acceleration
 - Den rör sig med en acceleration som ökar linjärt med tiden
 - Den rör sig inte alls
- Vad händer med den positiva laddningens potentiella energi, efter det att den släppts fri?
 - Den är oförändrad eftersom det elektriska fältet är konstant
 - Den är oförändrad eftersom laddningen inte kommer att röra sig
 - Den kommer att öka eftersom laddningen kommer att röra sig i det elektriska fältets riktning
 - Den kommer att minska eftersom laddningen rör sig i en riktning motsatt det elektriska fältets riktning
 - Den kommer att minska eftersom den rör sig i det elektriska fältets riktning
- En positiv laddning kan placeras i en av de två markerade platserna i ett område med konstant elektriskt fält, som visas nedan

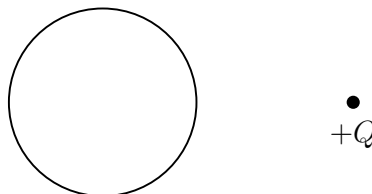


Hur kan kraften på laddningen i de två olika lägena jämföras?

- Kraften på laddningen är större i läge 1
- Kraften på laddningen är större i läge 2
- Kraften på laddningen är noll i båda lägena
- Kraften på laddningen i de två lägena är lika men inte noll
- Kraften på laddningen i de två lägena är av samma styrka men motriktade

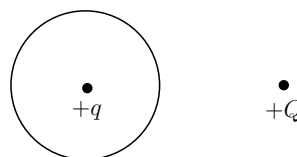
4. Figuren nedan visar en ihålig ledande sfär vilken givits en jämnt fördelad positiv laddning på ytan. Därefter placeras en positiv laddning $+Q$ i närheten av sfären, enligt figur. Vad är riktningen på det elektriska fältet i centrum av sfären efter det att den positiva laddningen $+Q$ placerats nära sfären?

- a) Vänster
- b) Höger
- c) Upp
- d) Ned
- e) Elektriska fältet är noll

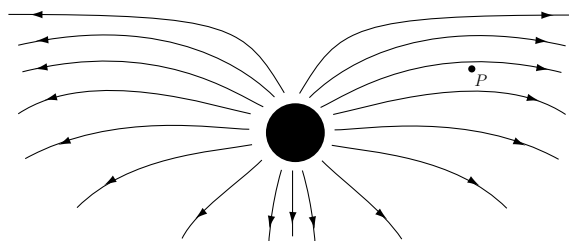


5. Figuren nedan visar en elektrisk laddning q placerad i centrum av en ihålig oladdad metallsfär. Utanför sfären placeras en annan laddning $+Q$. Båda laddningarna är positiva. Välj en av följande alternativ som beskriver kraften på var och en av de båda laddningarna.

- a) Båda laddningarna känner av lika stor kraft riktad från varandra.
- b) Ingen av laddningarna känner av någon kraft
- c) Det är ingen kraft på Q men en kraft på q
- d) Det är ingen kraft på q men en kraft på Q
- e) Båda laddningarna känner av en kraft men krafterna har olika styrka



Fältlinjer för fråga 6



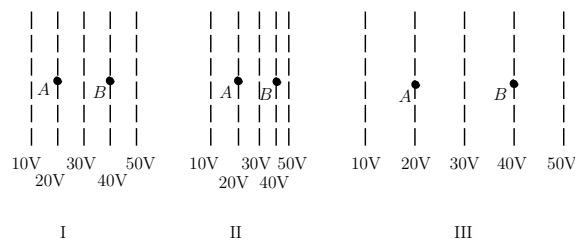
6. Vad är riktningen på den elektriska kraften på en negativ laddning som placeras i punkten P i figuren ovan?

- a) ←
- b) ↙
- c) →
- d) ↗
- e) ingen av de i a-d

7. En elektron är placerad i en punkt på x -axeln där den elektriska potentialen är $+10$ volt (jord i oändligheten). Vilket alternativ nedan beskriver bäst elektrodens fortsatta rörelse?
- Elektronen kommer att röra sig åt vänster (negativ x -led) eftersom den har negativ laddning
 - Elektronen kommer att röra sig åt höger (positiv x -led) eftersom den har negativ laddning
 - Elektronen kommer att röra sig åt vänster (negativ x -led) eftersom potentialen är positiv
 - Elektronen kommer att röra sig åt höger (positiv x -led) eftersom potentialen är positiv
 - Rörelsen kan inte förutsägas med den givna informationen

Gemensamt för frågorna 8–10

I figurerna nedan markerar de streckade linjerna ekvipotentialytter. En laddad partikel flyttas från punkt A till punkt B . Laddningens storlek är $1 \mu\text{C}$.



8. Hur är förhållandet mellan arbetet som krävs för att flytta partikeln i de tre fallen?
- Mest arbete i I
 - Mest arbete i II
 - Mest arbete i III
 - I och II kräver lika stort arbete men mindre än III
 - Alla tre kräver lika stort arbete
9. Hur är förhållandet mellan styrkan av det elektriska fältet i punkten B i de tre fallen?
- $I > III > II$
 - $I > II > III$
 - $III > I > II$
 - $II > I > III$
 - $I = II = III$

10. Studera fallet III. Vad är riktningen på den elektriska kraften på laddningen $+1 \mu\text{C}$ när den är i A respektive B?

- a) vänster i A och vänster i B
- b) höger i A och höger i B
- c) vänster i A och höger i B
- d) höger i A och vänster i B
- e) ingen elektrisk kraft i vare sig A eller B

Svar: 1-c, 2-e, 3-d, 4-e, 5-d, 6-a, 7-e, 8-e, 9-d, 10-a,