

## Föreläsning 1

Motsvarar avsnitten 2.1–2.3 i Griffiths.

### Elektrisk laddning

Två fundamentala begrepp: källor och fält. I elektrostatiken är källan den elektriska laddningen och fältet det elektriska fältet. Två naturlagar för den elektriska laddningen:

1. Laddningen uppträder endast i heltalsmultiplar av fundamentalladdningen

$$e = -1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} = -1.60 \cdot 10^{-19} \text{ As.}$$

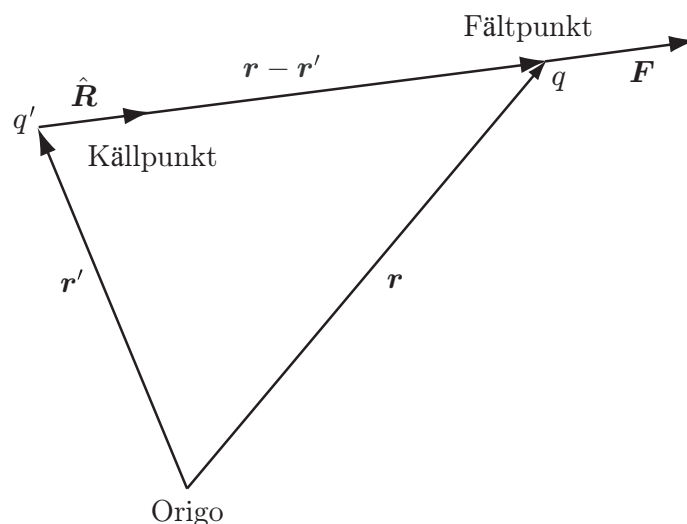
Med andra ord är

$$q = ne, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

2. Laddningen är alltid bevarad (kan ej skapas eller förintas) i ett slutet system.

### Coulombs lag

Låt  $q$  och  $q'$  vara styrkorna på två punktladdningar i punkterna  $\mathbf{r}$  respektive  $\mathbf{r}'$ .



Coulombs lag ger kraften på punktladdningen med styrkan  $q$  som punktladdningen med styrkan  $q'$  ger upphov till:

$$\mathbf{F} = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Här betecknar  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$  permittiviteten för frirymd. Ofta införs

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad R = |\mathbf{R}|, \quad \hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Med dessa beteckningar kan kraften alternativt skrivas som

$$\mathbf{F} = q \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}. \quad (\star)$$

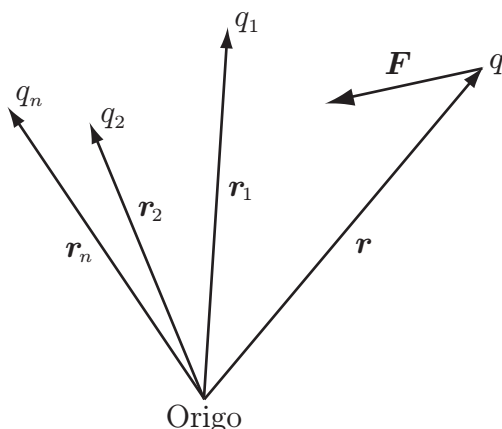
Notera att Griffiths använder  $\mathbf{z}$  istället för  $\mathbf{R}$ . Följande viktiga egenskaper gäller för ( $\star$ ):

1. Kraften är riktad längs sammanbindningslinjen mellan de båda punktladdningarna.
2. Kraften är proportionell mot såväl  $q$  som  $q'$ .
3. Kraften är attraktiv då  $qq' < 0$  och repulsiv då  $qq' > 0$ . Figuren på föregående sida visar fallet  $qq' > 0$ .
4. Kraften är omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan de båda punktladdningarna.

**Kommentar:** Det är lätt att det blir fel tecken på kraften. Eftersom punktladdningar med lika tecken repellerar varandra och punktladdningar med olika tecken attraherar varandra kan man i många fall enkelt kontrollera om man har fått rätt tecken på kraften. ♣

## Superposition

Antag en punktladdning med styrkan  $q$  i punkten  $\mathbf{r}$  och  $N$  andra punktladdningar med styrkorna  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , i punkterna  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .



Superpositionsprincipen ger kraften på punktladdningen med styrkan  $q$  som punktladdningarna med styrkorna  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , tillsammans ger upphov till:

$$\mathbf{F} = q \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

## Elektriskt fält

Det elektriska fältet i punkten  $\mathbf{r}$  från en fördelning av punktladdningar med styrkorna  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , i punkterna  $\mathbf{r}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , definieras som

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}.$$

Här betecknar  $\mathbf{F}$  kraften på en punktladdning (även kallad testladdning) med styrkan  $q$  i punkten  $\mathbf{r}$ .

**Kommentar:** Testladdningen påverkar de andra punktladdningarna med krafter. Om testladdningens styrka  $q$  inte är liten kan de andra punktladdningarna flytta på sig på grund av den extra kraft de påverkas av från testladdningen. För att förhindra detta behöver  $q$  vara infinitesimal i definitionen ovan. ♣

**Exempel:** Det elektriska fältet i en punkt  $\mathbf{r}$  från en punktladdning med styrkan  $q'$  i punkten  $\mathbf{r}'$  är

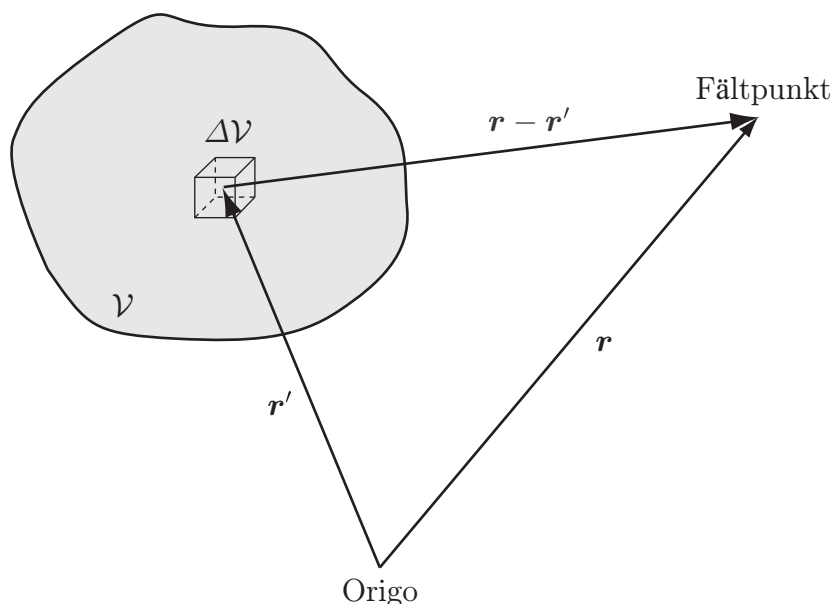
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2}.$$

Notera att det elektriska fältet är radiellt och avtar som kvadraten på avståndet. ♣

## Kontinuerliga laddningsfördelningar

Vi intresserar oss för tre slags kontinuerliga laddningsfördelningar:

### Rymdladdning



Rymdladdningstätheten  $\rho$  är laddningen per volymenhet [ $\text{As}/\text{m}^3$ ]. Ett litet volymelement  $\Delta\mathcal{V}$  centrerat i punkten  $\mathbf{r}'$  har laddningen  $\Delta q = \rho(\mathbf{r}')\Delta\mathcal{V}$ . Det elektriska fältet från  $\Delta\mathcal{V}$  ges av

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r}')\Delta\mathcal{V}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Superposition och gränsövergång i volymen  $\mathcal{V}$  (finns bara laddning inom  $V$ ) ger volymintegralen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'.$$

Punkten  $\mathbf{r}$ , där fältet bestäms, kallas fältpunkt och punkten  $\mathbf{r}'$ , som sveper över källfördelningen, kallas källpunkt. Griffiths betecknar volymelement med  $d\tau'$ .

## Ytladdning

Ytladdningstätheten  $\rho_S$  är laddningen per ytenhet [As/m<sup>2</sup>]. Det elektriska fältet från en ytladdningstäthet på ytan  $\mathcal{S}$  ges av ytintegralen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \rho_S(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS'.$$

I formelsamlingen, exempelsamlingen och på föreläsningarna använder vi beteckningen  $\rho_S$  för ytladdningstätheten och  $dS'$  för ytelementet. Griffiths använder beteckningen  $\sigma$  för ytladdningstätheten och  $da'$  för ytelementet.

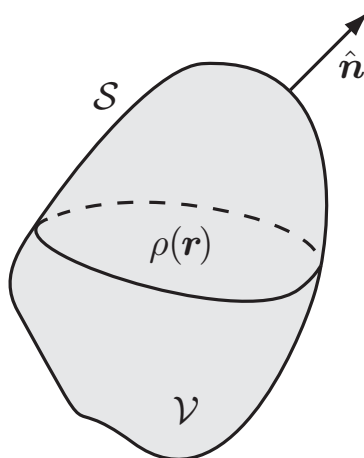
## Linjeladdning

Linjeladdningstätheten  $\rho_\ell$  är laddningen per längdenhet [As/m]. Det elektriska fältet från en linjeladdningstäthet på kurvan  $\mathcal{C}$  ges av linjeintegralen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \rho_\ell(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dl'.$$

I formelsamlingen, exempelsamlingen och på föreläsningarna använder vi beteckningen  $\rho_\ell$  för linjeladdningstätheten och  $dl'$  för linjeelementet. Griffiths använder beteckningen  $\lambda$  för linjeladdningstätheten och  $dl'$  för linjeelementet.

## Gauss lag på integralform



Låt  $\mathcal{V}$  vara en volym som omsluts av ytan  $\mathcal{S}$  med utåtriktad normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . Då gäller

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}') dv' = \frac{Q_{\text{innanför}}}{\epsilon_0},$$

där  $Q_{\text{innanför}}$  är totala laddningen innanför  $\mathcal{S}$ . Gauss lag på integralform kan användas för att på ett smidigt sätt bestämma elektriska fältet utan att integrera, men det fungerar bara om det finns fördelaktig symmetri! Mer specifikt krävs det att  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  är konstant på den valda Gaussytan, så att integralen reduceras till multiplikation av  $E$  med arean.

Gauss lag på integralform är lämplig att använda då man skall bestämma elektriska fältet eller elektriska potentialen från följande laddningsfördelningar:

- sfäriskt symmetrisk
- cirkulär cylindrisk
- (oändligt) stora plan (tas upp i Griffiths, mindre vanligt i denna kurs)

Tre vanligaste fallen:

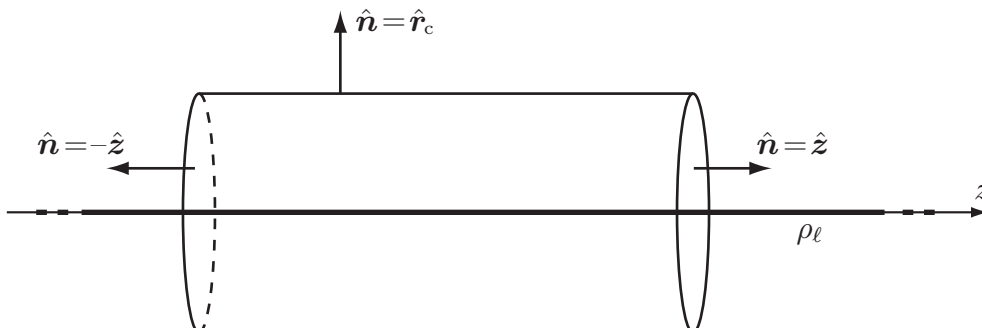
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \parallel \hat{\mathbf{n}}$  (t.ex. sfär)
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \perp \hat{\mathbf{n}}$  (t.ex. bottenytorna av en cylinder)
- $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$  (t.ex. för att konstatera att potentialen är konstant i en viss region)

Utan förutsättningarna ovan kan  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  inte bestämmas med Gauss lag, utan man får istället integrera fältet från laddningsfördelningen. Tyvärr vanligt fel på tentan att Gauss lag missbrukas när den inte är tillämplig.

**Exempel:** Det elektriska fältet från lång rak linjeladdning (se figuren nedan) kan bestämmas med hjälp av Gauss lag på integralform. Resultatet är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 r_c} \hat{\mathbf{r}}_c. \quad (**)$$

Med andra ord är fältet riktat i radiell led i två dimensioner och avtar som ett genom avståndet.



Griffiths använder  $s$  som beteckning för avståndet från  $z$ -axeln. På föreläsningarna, liksom i exempelsamlingen och formelsamlingen, används beteckningen  $r_c$ . ♣

## Gauss lag på differentialform

Gauss lag på differentialform lyder

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}.$$

**Kommentar:** Observera att Gauss lag inte är samma som Gauss sats. Gauss sats är en integralsats som relaterar normalytintegralen av ett vektorfält till volymintegralen av divergensen av vektorfältet. ♣

## Elektrisk potential

I tre dimensioner gäller att

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Således kan det elektriska fältet skrivas som negativa gradienten på ett skalärfält:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}).$$

Det skalära fältet  $V(\mathbf{r})$  är den elektrisk potentialen i punkten  $\mathbf{r}$ .

**Kommentar:** Du kan själv kontrollera  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$  genom att utföra deriveringen i kartesiska koordinater:  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  och  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x', y - y', z - z')$ . ♣

**Exempel:** Den elektriska potentialen i en punkt  $\mathbf{r}$  från en punktladdning med styrkan  $q$  i punkten  $\mathbf{r}'$  är

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Notera att elektriska potentialen avtar som ett genom avståndet. ♣  
För de tre kontinuerliga laddningsfördelningarna ovan har vi:

### Rymdladdning

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

### Ytladdning

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

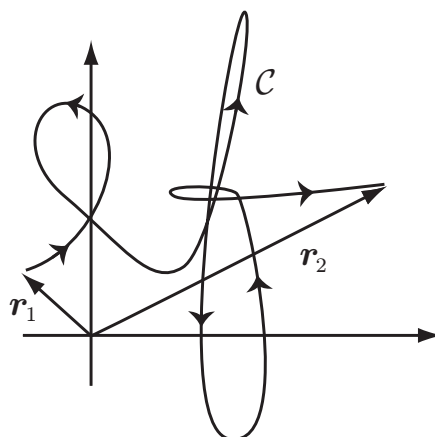
### Linjeladdning

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_\ell(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\ell' \quad (\star \star \star)$$

## Fältlinjer och ekvipotentialytor

En fältlinje är en linje som i varje punkt har det elektriska fältet som tangent. I elektrostatiken börjar en fältlinje alltid på en positiv laddning och slutar på en negativ laddning. En ekvipotentialyta är en yta på vilken elektriska potentialen är konstant. Fältlinjer och ekvipotentialytor skär varandra med  $90^\circ$  vinkel.

## Tangentlinjeintegralen av elektriska fältet



Vi har sett att  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$ . Om denna relation integreras från en punkt  $\mathbf{r}_1$  till en punkt  $\mathbf{r}_2$  längs en kurva  $\mathcal{C}$  fås

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\ell}' = - \int_{\mathcal{C}} \nabla' V(\mathbf{r}') \cdot d\boldsymbol{\ell}' = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2).$$

Med andra ord beror tangentlinjeintegralen av elektriska fältet endast av elektriska potentialens värde i begynnelse- och slutpunkten. Detta är sant för alla konservativa vektorfält, det vill säga alla vektorfält  $\mathbf{F}$  som satisfierar  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ . Det elektriska fältet är konservativt eftersom

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \times \nabla V(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{0}.$$

**Exempel:** Det elektriska fältet från en lång rak linjeladdning ges enligt (\*\*) av

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho\ell}{2\pi\epsilon_0 r_c} \hat{\mathbf{r}}_c$$

Elektriska potentialskillnaden mellan  $r_c = a$  och  $r_c = b$  blir därmed

$$V(a) - V(b) = \int_a^b \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{r}}_c dr_c = \frac{\rho\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Detta är samma resultat som vi får om vi istället beräknar elektriska potentialskillnaden med hjälp av (\*\*\*). ♣