LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Inst. for Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2017-10-25
DIGITAL SIGNALBEHANDLING, EITF75/ESS040
Tid: 08.00-13.00
Sal: MA8 - Hela

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling i signalbehandling.
[*Allowed items on exam: calculator, Signal Processing tables of formulas.*]

Observandum: För att underlätta rättningen: [*In order to simplify the correction:*]
-Lös endast **en** uppgift per blad. [*Only solve one problem per paper sheet.*]
-Skriv kod+personlig identifierare på **samtliga** blad.
[*Please write your code+personal identifier on every paper sheet.*]
Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer.
[*Statements must be motivated by reasoning and/or equations.*]
Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet.
[*The points from the tasks will be added to the examination score.*]
Max Tot. poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0
[*Max Tot. score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0*]
Betygsgränser för kursen: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).
[*Grading; 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).*]

1. Antag att signalen $x_a(t) = sin(2\pi F_0 t)$ samplas med sampeltakten F_s [Hz]. Antag vidare att den samplade signalen $x(n)$ rekonstrueras idealt dvs den analoga signalen $y_a(t)$ skapas ur $x(n)$. Ange utsignalen $y_a(t)$ uttryckt i frekvenserna F_0 och F_s när,
[*The input signal $x_a(t) = sin(2\pi F_0 t)$ is sampled with the sample rate F_s [Hz]. The sampled signal $x(n)$ is then reconstructed ideally, i.e. the analog signal $y_a(t)$ is created from $x(n)$. Provide the output signal $y_a(t)$ expressed in frequencies F_0 and F_s when,*]

   a) $0 < F_0 < F_s/2$ (0.1p)
   b) $F_s/2 < F_0 < F_s$ (0.2p)
   c) $F_s < F_0 < 3F_s/2$. (0.2p)

2. Ett hjul med fem (jämnt fördelade) ekrar roterar med 12 varv/sek motsols (dvs +12 Hz). Vi har en videokamera med valbar sampeltakt, F_s, mellan 50-80 bilder/sek som spelar in hjulets rörelse. Bestäm den valbara sampeltakten, F_s, så att följande uppfattade rotationshastigheter erhålls:
[*A wheel with 5 (evenly distributed) spokes is rotating with 12 revolutions/second (i.e. +12 Hz). We have a video camera with adjustable sample rate, F_s, between 50-80 pictures/second which records the wheel movement. Determine the adjustable sample rate such that the following apprehended rotation speeds are achieved:*]

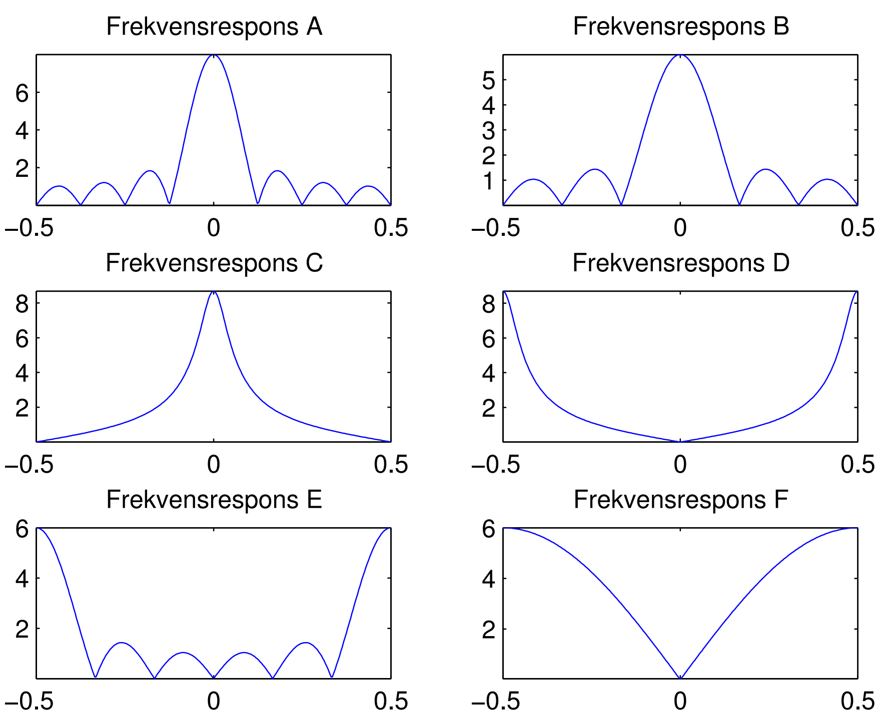
a) Rotationshastigheten 0 varv/sek. (0.1p)
[*Rotation speed 0 rev/sec.*]

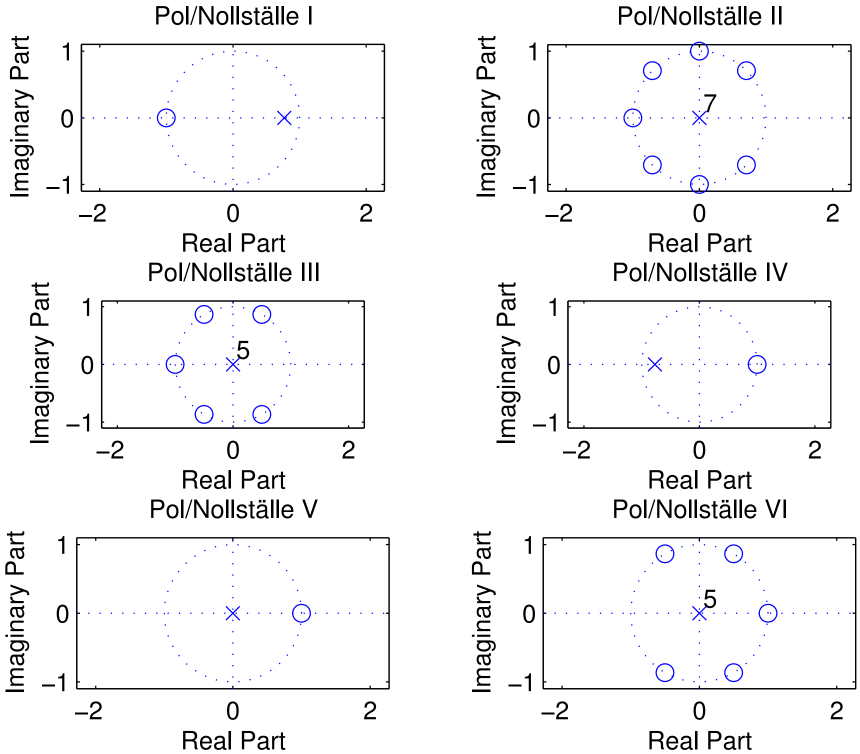
b) Rotationshastigheten 2 varv/sek motsols (dvs +2 Hz). (0.2p)
[*Rotation speed 2 rev/sec counter clock wise (i.e. +2 Hz).*]

c) Rotationshastigheten 2 varv/sek medsols (dvs -2 Hz). (0.2p)
[*Rotation speed 2 rev/sec clock wise (i.e. -2 Hz).*]

3. Nedan visas 6 st frekvensresponser samt 6 st pol-/nollställe-diagram. Matcha de olika figurerna till respektive LTI-system (S1-S6) givet nedan. Det ingår i uppgiften att avgöra vilken storhet vi har på x-axlarna i frekvensresponserna. Motivera ditt svar! (1.0p)
[*Below there are given 6 magnitude responses and 6 pole/zero diagrams. Combine the diagrams with the corresponding LTI-systems (S1-S6) provided below. The task includes to decide the x-axis variables in the magnitude responses. Motivate your answer.*]

S1: $y(n) = 0.77y(n-1) + x(n) + x(n-1)$
S2: $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+0.77z^{-1}}$
S3: $H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5}$
S4: $y(n) = \sum_{k=0}^{7} x(n-k)$
S5: $H(z) = 3 - 3z^{-1}$
S6: $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4) + x(n-5)$





4. Fibonacci-serien för varje heltalsindex, n, ges av summan av de två föregående talen, enligt,
[*The Fibbonacci series, for each integer number, n, is given by the sum of the two previous numbers, according to,*]

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Detta ger differens-ekvationen,
[*This leads to the following difference equation,*]

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2), \quad n \geq 2$$

med begynnelsevärden, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$. Bestäm ett slutet uttryck för Fibonacci-serien, dvs lös ovanstående differens-ekvation. (1.0p)
[*with initial conditions, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$. Determine a closed form solution for the Fibbonacci series, i.e. solve the above difference equation.*]

5. Ett LTI-system är beskrivet av nedanstående differensekvation,
[*An LTI system is given by the following difference equation,*]

$$y(n) = 0.5y(n-1) + bx(n)$$

a) Bestäm parametern b så att $|H(\omega)| = 1$ vid vinkelfrekvensen $\omega = 0$. (0.3)
[*Determine the parameter b such that $|H(\omega)| = 1$ at the angular frequency $\omega = 0$.*]

b) Bestäm "*half-power point*" (dvs vinkelfrekvensen, ω, för vilken $|H(\omega)|^2$ är lika med hälften av dess toppvärde). (0.7)
[*Determine the "half-power point" (i.e. the angular frequency ω where $|H(\omega)|^2$ equals half it's top value)*]

6. En lärare berättar en hemlighet till sin klass i signalbehandling på 78 studenter. Varje person som har hört hemligheten sprider denna hemlighet vidare till två nya personer (utanför klassen) första veckan efter att ha hört hemligheten. Därefter sprider varje person hemligheten vidare till fyra nya personer, varje därpå följande vecka tills alla människor på jorden känner till hemligheten. Bestäm en differensekvation som beskriver förloppet. Lös därefter differensekvationen och bestäm hur många veckor det tar för alla människor på jorden att ha hört hemligheten! Antag $7 \cdot 10^9$ personer på jorden. (1.0p)
[*A teacher tells a secret to his class of 78 students. Every student spreads this secret to two new persons (outside the class) the first week after they heard the secret. Each person then spreads this secret to 4 new persons every following week until all people on earth have heard the secret. Determine a difference equation which models the process. Solve the difference equation and determine how many weeks it takes for all people on earth to have heard the secret. Assume we are $7 \cdot 10^9$ persons on earth*]

Lycka Till!*/Good Luck!*

Please remember to answer the Course-Evaluation-Questionnaire, CEQ!

SVAR OCH LÖSNINGAR Tentamen, EITF75/ESS040, 2017-10-25

SVAR 1.

a) Ingen vikning, dvs $y_a(t) = x_a(t) = sin(2\pi F_0 t)$. (0.1p)

b) Vikning och teckenbyte fås, dvs $y_a(t) = sin(2\pi(F_0 - F_s)t) = -sin(2\pi(F_s - F_0)t)$. (0.2p)

c) Vikning fås, dvs $y_a(t) = sin(2\pi(F_0 - F_s)t)$. (0.2p)

SVAR 2. Sampeltakten ges av lösningen till följande ekvation

$$F_s(\frac{12}{F_s} \pm k\frac{1}{E}) = F$$

Där F är den uppfattade frekvensen, E är antalet ekrar och k är ett heltal, dvs vi får (för $k = -1$)

a)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 0 \quad => F_s = 5 \cdot 12 = 60$$

b)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = 2 \quad => F_s = 5 \cdot (12 - 2) = 50$$

c)

$$F_s(\frac{12}{F_s} - \frac{1}{5}) = -2 \quad => F_s = 5 \cdot (12 + 2) = 70$$

SVAR 3. A-S4-II
B-S6-III
C-S1-I
D-S2-IV
E-S3-VI
F-S5-V

SVAR 4. The Fibonacci series is given by

$$y(n) = y(n-1) + y(n-2), \quad n \geq 2$$

with initial conditions, $y(0) = 1$, $y(1) = 1$.
Use the single sided Z-transform to transform the difference equation: =>

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= z^{-1}Y^+(z) + y(-1) \cdot z^0 + z^{-2} \cdot Y^+(z) + y(-1)z^{-1} + y(-2) \cdot z^0 = \\ &= z^{-1}Y^+(z) + y(-1) + z^{-2} \cdot Y^+(z) + y(-1)z^{-1} + y(-2) \end{aligned}$$

Bring all $Y^+(z)$ terms to the left =>

$$Y^+(z) = \frac{y(-1) + y(-2) + y(-1)z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

We calculate backwards in the difference equation to get the values of y(-1) and y(-2), i.e.

$$y(n-2) = y(n) - y(n-1)$$

$$\begin{aligned} y(-1) &= y(1) - y(0) = 0 \qquad (n=1) \\ y(-2) &= y(0) - y(-1) = 1 \qquad (n=0) \end{aligned}$$

=>

$$Y^{+}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

We need to find the inverse Z-transform in order to get a closed form expression of y(n). We use partial fraction expansion.
The roots to the polynomial $z^2 - z - 1 = 0$ are given by

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

=>

$$Y^{+}(z) = \frac{A_1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z^{-1}}$$

where

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} z^{-1}\right) Y^{+}(z)\Big|_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ A_2 &= \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} z^{-1}\right) Y^{+}(z)\Big|_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

This gives the answer

$$y(n) = \underline{\underline{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) u(n)}}$$

SVAR 5. Givet ett LTI-system

$$y(n) = 0.5y(n-1) + bx(n)$$

a) Bestäm b så att $|H(\omega)| = 1$ vid frekvensen $\omega = 0$.

svar: Z-transformera differensekvationen ger,

$$\begin{aligned}
Y(z) &= 0.5z^{-1}Y(z) + bX(z) \\
Y(z)(1 - 0.5z^{-1}) &= bX(z) \\
Y(z) &= \frac{b}{(1 - 0.5z^{-1})}X(z) \\
=> H(z) &= \frac{b}{(1 - 0.5z^{-1})}
\end{aligned}$$

Ur $H(z)$ fås Fouriertransformen genom

$$\begin{aligned}
H(\omega) &= H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{b}{(1 - 0.5e^{-j\omega})} \qquad (1) \\
=> |H(0)| &= |\frac{b}{(1 - 0.5)}| \equiv 1 \quad => \underline{\underline{b = \pm\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

b) Bestäm ω för vilken $|H(\omega)|^2$ är lika med hälften av dess toppvärd.
svar: Toppvärdet fås då Ekv (1) har sitt största värde, dvs när nämnaren har sitt minsta värde. Detta sker då nämnaren blir 0.5 och toppvärdet blir 1 (anv. $b = 0.5$), dvs

$$\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 &= \left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\underbrace{(1 - 0.5cos(\omega))^2}_{real} + \underbrace{(0.5sin(\omega))^2}_{imag}}}\right)^2 \equiv \frac{1}{2} \\
=> & \quad \frac{1}{4}\frac{1}{(1.25 - cos(\omega))} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Mulitiplicera båda sidor med 4, samt invertera båda sidor,

$$\begin{aligned}
1.25 - cos(\omega) &= \frac{1}{2} \\
=> cos(\omega) &= 1.25 - 0.5 \\
=> \omega &= acos(1.25 - 0.5) \underline{\underline{\approx 0.7227}}
\end{aligned}$$

SVAR 6. Problemet kan ställas upp som en andra ordningens differens-ekvation av $y(n)$ som beskriver antalet personer som känner till hemligheten vid varje vecka n, med begynnelsevärden, enligt

$$y(n) = (a + b)y(n - 1) + cy(n - 2), \qquad y(-1) = d,\ y(-2) = 0$$

där
a = antalet nya personer som varje person tillför första veckan.

b = 1, då gruppen som sprider hemligheten ingår.
c = antalet ytterligare nya personer som varje student tillför andra veckan.
d = gruppens storlek från början.

Differens-ekvationen blir,

$$y(n) = 3y(n-1) + 2y(n-2), \qquad y(-1) = 78,\; y(-2) = 0$$

Z^+-transformering ger,

$$Y^+(z) = 78\frac{3 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - 2z^{-2}}$$

Poler till systemet fås ur,

$$z^2 - 3z - 2 = 0 => p_{12} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

Partialbråksuppdelning ger,

$$Y^+(z) = 78\frac{3 + 2z^{-1}}{1 - 3z^{-1} - 2z^{-2}} = 78\left(\frac{A}{(1 - p_1 z^{-1})} + \frac{B}{(1 - p_2 z^{-1})}\right)$$

där handpåläggning ger,

$$A = \frac{(3 + 2/p_1)}{(1 - p_2/p_1)} \approx 3.0765,\; B = \frac{(3 + 2/p_2)}{(1 - p_1/p_2)} \approx -0.0765$$

dvs lösningen till differens-ekvationen ges av

$$y(n) = 78(Ap_1^n + Bp_2^n)$$

eftersom $y(13) < 7 \cdot 10^9 < y(14)$, fås att alla personer på jorden får reda på hemligheten i v14, dvs i den 15:e veckan (start i v0).