LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Inst. för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2013-08-22 i
Digital Signalbehandling - ESS040 - ETI265
Tid: 8.00–13.00
Sal: MA10:F-G

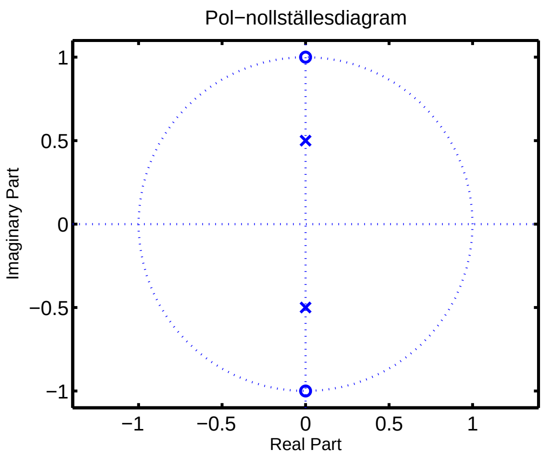
Hjälpmedel	Miniräknare och formelsamlingar.
Observandum	För att underlätta rättningen: -Lös endast en uppgift per blad. -Skriv namn på samtliga blad. Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer. Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet. Betygsgränser: 3 ($\geq$3.0p), 4 ($\geq$4.0p), 5 ($\geq$5.0p).

1. En tidsdiskret krets beskrivs av differensekvationen

$$y(n) = 0.5y(n-1) + x(n) + 2x(n-1)$$

a) Rita pol-nollställesdiagram för kretsen. (0.1p)
b) Bestäm $h(n)$ för kretsen. (0.2p)
c) Bestäm utsignalen $y(n)$ om insignalen är $x(n) = cos(2\pi 0.25n)$ för alla n. (0.2p)

2. Ett tidsdiskret system ges av nedanstående pol-nollställesdiagram. För systemet gäller att $H(z)|_{z=1} = 1$



a) Bestäm systemfunktionen $H(z)$. (0.1p)
b) Skissa systemets frekvenssvar för $0 < \omega < 2\pi$. (0.2p)
c) Bestäm utsignalen $y(n)$ om insignalen är $x(n) = cos(2\pi 0.25n)$ för alla n. (0.2p)

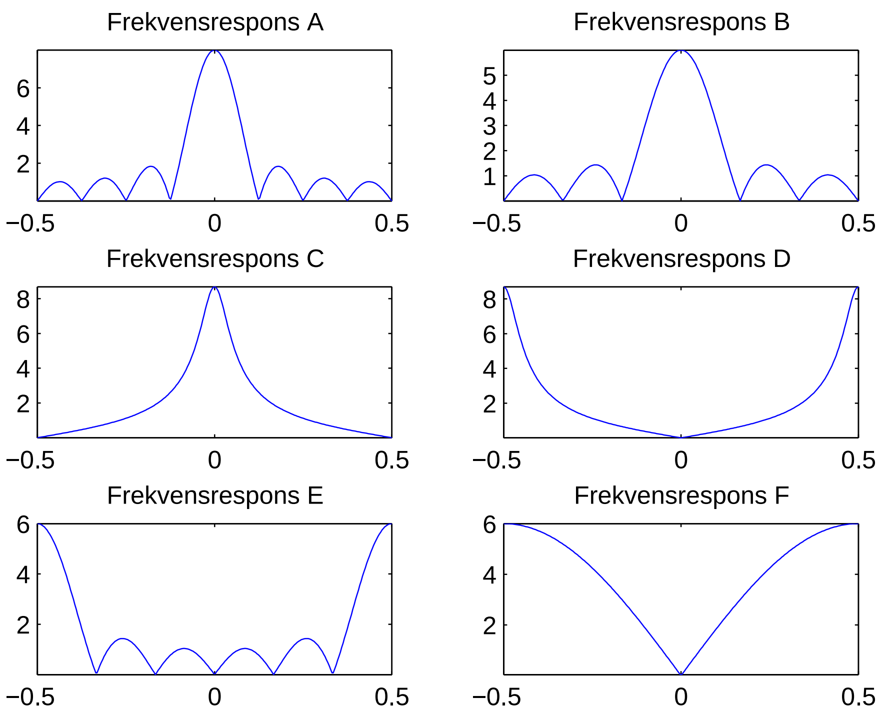
3. Betrakta ett system som ges av följande systemfunktion $H(z)$;

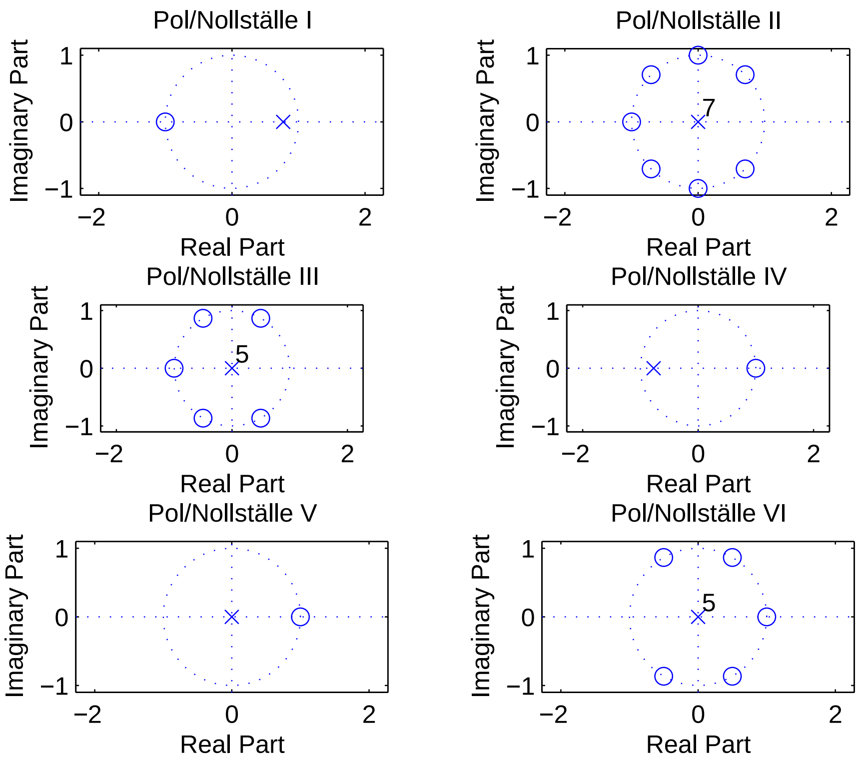
$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

a) Bestäm impulssvaret $h(n)$ till $H(z)$ då systemet är i vila (zero-state). (0.4p)
b) Bestäm stegsvaret till $H(z)$ då systemet är i vila (zero-state), dvs bestäm utsignalen då insignalen är lika med steget ($x(n) = u(n)$). Beskriv speciellt delarna ur stegsvaret som hör till den transienta lösningen samt den stationära lösningen. (0.6p)

4. Nedan visas 6 st amplitudfunktioner samt 6 st pol/nollställe-diagram. Matcha de olika figurerna till respektive LTI-system (S1-S6) givet nedan. Motivera ditt svar! (1.0p)

S1: $y(n) = 0.77y(n-1) + x(n) + x(n-1)$
S2: $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+0.77z^{-1}}$
S3: $H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} - z^{-3} + z^{-4} - z^{-5}$
S4: $y(n) = \sum_{k=0}^{7} x(n-k)$
S5: $H(z) = 3 - 3z^{-1}$
S6: $y(n) = x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4) + x(n-5)$

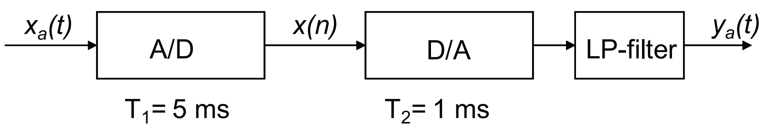




5. Betrakta systemet i figuren nedan. Samplingsperioden för A/D and D/A omvandlarna är $T_1 = 5$ ms and $T_2 = 1$ ms. Bestäm utsignalen $y_a(t)$ om insignalen är given av;

$$x_a(t) = 3\cos(100\pi t) + 2\cos(250\pi t) \qquad (t \text{ i sekunder})$$

och plotta spektum av signalerna $x_a(t)$, $x(n)$ and $y_a(t)$. A/D och D/A omvandlarna

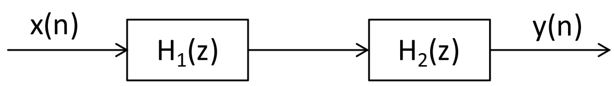


antas vara ideala, LP-filtret är idealt, dvs det har en konstant förstärkning lika med 1 i frekvensintervallet $-F_s/2 \leq F \leq F_s/2$, och dämpar alla frekvenskomponenter över $|F_s/2|$ till noll, där F_s är samplingfrekvensen i D/A-omvandlaren. (1.0p)

6. Två FIR-filter kaskadkopplas enligt figur nedan, där

$$H_1(z) = 1 - 2rcos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}$$

Bestäm $H_2(z)$ av minimal ordning så att kaskadkopplingen $H(z) = H_1(z)H_2(z)$ får



linjär fas och förstärkningen i DC-frekvensen blir 1, dvs $|H(1)| = 1$. Rita fasfunktionen för $0 < \omega < 2\pi$. (1.0p)

Lycka till!

Lunds tekniska högskola. Institutionen för elektro- och informationsteknik, LTH

Lösningar till signalbehandling (ESS040) , 2013-08-22

1. Givet: $y(n) = 0.5\ y(n-1) + x(n) + 2x(n-1)$

Sökt: a) Bestäm pol-zero plot

b) Bestäm $h(n)$ för kretsen.

c) Bestäm $y(n)$ om $x(n) = \cos(2\pi 0.25 n)$ *för alla n* om $a = 0.5$

Lösning: a,b,c)

$$Y(z) = 0.5\ z^{-1}Y(z) + X(z) + 2z^{-1}X(z) \quad \textit{ger}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z+2}{z-0.5}$$

$$h(n) = 0.5^{n}\ u(n) + 2\cdot 0.5^{n-1}\ u(n-1)$$

$$x(n) = \cos(2\pi 0.25 n) \quad \textit{för alla } n \text{ ger}$$

$$y(n) = |H(\omega)|_{\omega=2\pi 0.25} \cos(2\pi 0.25 n + \arg\{H(\omega)|_{\omega=2\pi 0.25}\}) \quad \textit{för alla } n$$

$$H(\omega)|_{\substack{\omega=\pi/2 \\ z=j \\ a=0.5}} = \frac{1+2e^{-j2\pi 0.25}}{1-0.5e^{-j2\pi 0.25}} = \frac{1-2j}{1+0.5j} = -2j = 2e^{-j\pi/2}$$

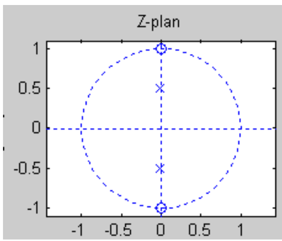
Svar: $$y(n) = 2\cos(2\pi 0.25 n - \pi/2) \quad \textit{för alla } n$$

2. Givet: System bestämt av pol-zero plot och $H(z)|_{z=1} = 1$

Sök: a) Bestäm systemfunktionen $H(z)$.

b) Skissa $|H(\omega)|$ för $0 \le \omega \le 2\pi$

c) Bestäm $y(n)$ om $x(n) = \cos(2\pi 0.25 n)\ u(n)$ *för*

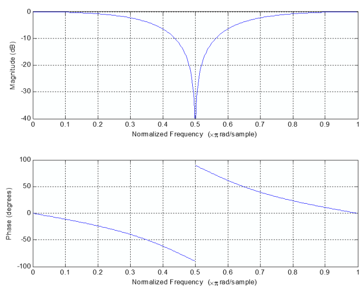


Lösning: a)

$$H(z) = konst \frac{1+z^{-2}}{1+0.25z^{-2}}$$

$$H(z)|_{z=1} = konst \frac{1+z^{-2}}{1+0.25z^{-2}} = \frac{2}{5/4} = 8/5 \quad \textit{ger } k = 5/8$$

b) Plotta tex i Matlab



c) $$X(z) = \frac{1-\cos(\pi/2)\ z^{-1}}{1-2\ \cos(\pi/2)\ z^{-1} + z^{-2}} = \frac{1}{1+z^{-2}} \quad \text{ger}$$

$$Y(z) = 5/8\ \frac{1+z^{-2}}{1+0.25z^{-2}} \cdot \frac{1}{1+z^{-2}} = 5/8\ \frac{1}{1+0.25z^{-2}}$$

$$y(n) = 5/8 \cdot (0.5)^{n} \cos(2\pi 0.25 n)\ u(n)$$

3. a). The impulse response, $h(n)$, is found by inverse Z-transformation of the system function, $H(z)$, which is given by,

$$H(z) = \frac{z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}} = \frac{z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{3}{5}z + \frac{2}{25}}$$

The poles are found by solving for zero in the denominator polynomial which gives,

$$p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{2}{5}$$

This gives,

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{2}{5})} = \frac{A_1}{(z - \frac{1}{5})} + \frac{A_2}{(z - \frac{2}{5})}$$

The coefficients A_1 and A_2 are found by either identification or directly using the identification-formula, and they become,

$$A_1 = -\frac{7}{2}, \quad A_2 = \frac{9}{2}$$

and

$$H(z) = \frac{-\frac{7}{2}}{(z - \frac{1}{5})} + \frac{\frac{9}{2}}{(z - \frac{2}{5})} = \frac{1}{2}z^{-1}\left[\frac{-7}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} + \frac{9}{(1 - \frac{2}{5}z^{-1})}\right]$$

The inverse Z-transform gives the impulse response

$$\underline{\underline{h(n) = \frac{1}{2}\left[9\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - 7\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]u(n-1)}}$$

b) The step-response is given by the output when the input signal is the step function, $(x(n) = u(n))$, i.e.

$$s(n) = h(n) * u(n)$$

This is equivalent to the multiplication in the Z-domain, i.e.

$$S(z) = H(z)U(z), \text{ where } U(z) = Z\{u(n)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$$S(z) = \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right)z}{(z - \frac{1}{5})(z - \frac{2}{5})(z - 1)} = \frac{A_1}{(z - \frac{1}{5})} + \frac{A_2}{(z - \frac{2}{5})} + \frac{A_3}{(z - 1)}$$

and identification gives,

$$A_1 = \frac{7}{8}, \quad A_2 = -3, \quad A_3 = \frac{25}{8}$$

This gives,

$$S(z) = \frac{\frac{7}{8}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{5}z^{-1})} + \frac{-3z^{-1}}{(1 - \frac{2}{5}z^{-1})} + \frac{\frac{25}{8}z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

and the inverse Z-transform gives the step response,

$$s(n) = \left[\frac{7}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{25}{8}\right] u(n-1) = \underline{\underline{\frac{1}{8}\left[25 + 35\left(\frac{1}{5}\right)^{n} - 60\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right] u(n-1)}}$$

where the stationary solution is given by;

$$s^{stat}(n) = \frac{25}{8}u(n-1)$$

and the transient solution is given by;

$$s^{trans}(n) = \frac{1}{8}\left[35\left(\frac{1}{5}\right)^{n} - 60\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right] u(n-1)$$

4. A-S4-II
B-S6-III
C-S1-I
D-S2-IV
E-S3-VI
F-S5-V

5)

$$x_a(t) = 3\cdot\cos(100\pi t) + 2\cdot\cos(250\pi t)$$

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{A/D} \xrightarrow{x(n)} \boxed{D/A} \longrightarrow \boxed{\text{Post filter}} \longrightarrow y_a(t)$$

$T_1 = 5ms$ $\quad$ $T_2 = 1ms$

The system uses two sampling frequencies F_1 and F_2

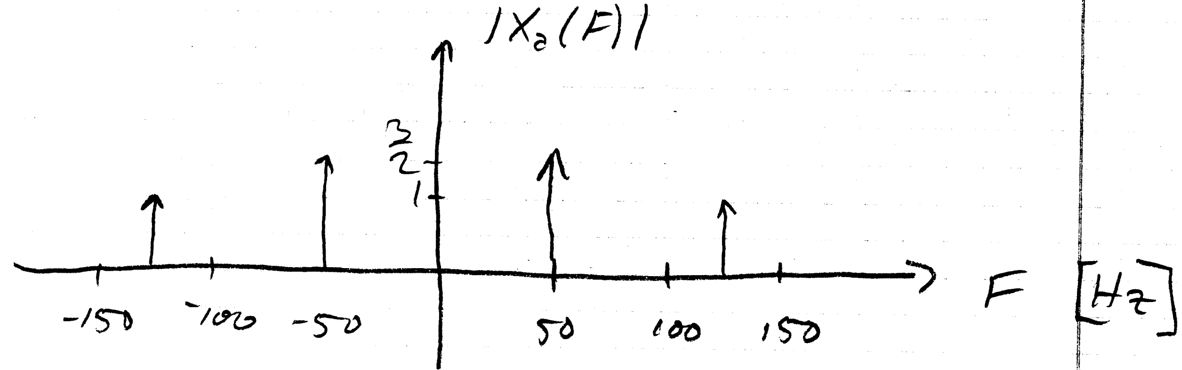
$$F_1 = \frac{1}{T_1} = 200\ Hz$$

$$F_2 = F_S = \frac{1}{T_2} = 1000\ Hz$$

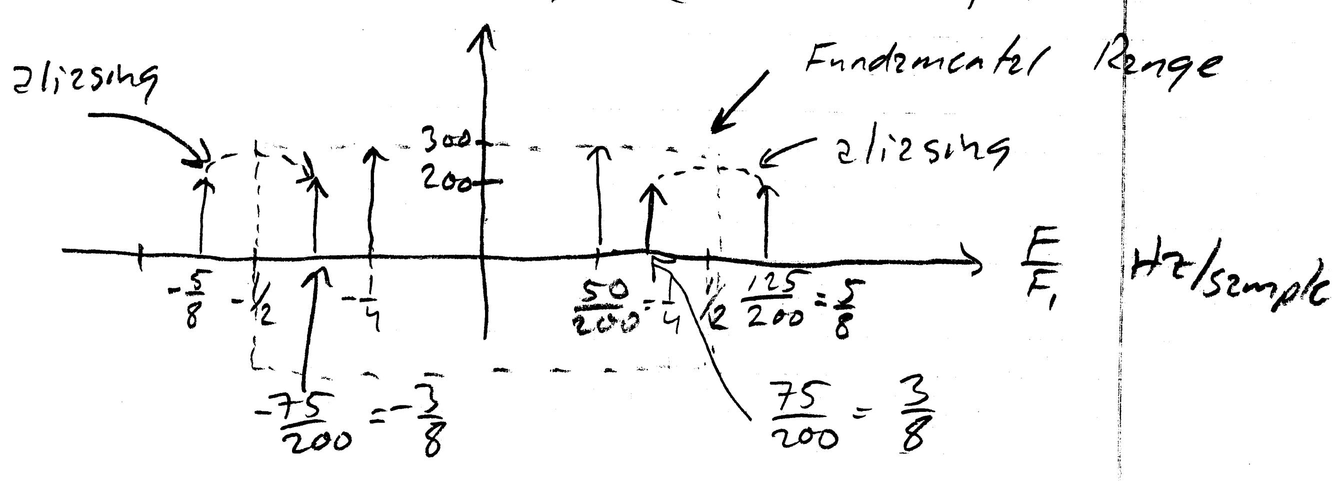
The sampling process can be described by

$$X\left(\frac{F}{F_1}\right) = F_S \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_1)$$

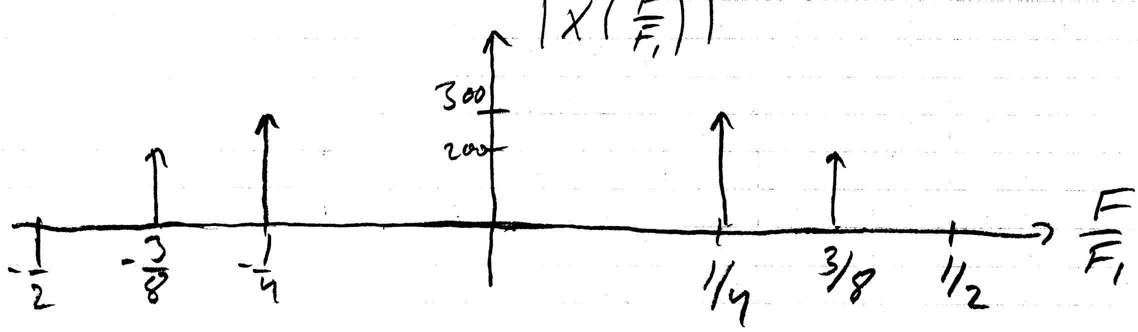
The plot of $|X_a(F)|$



The plot of $X\left(\frac{F}{F_1}\right)$ $(F_1 = 200\ Hz)$

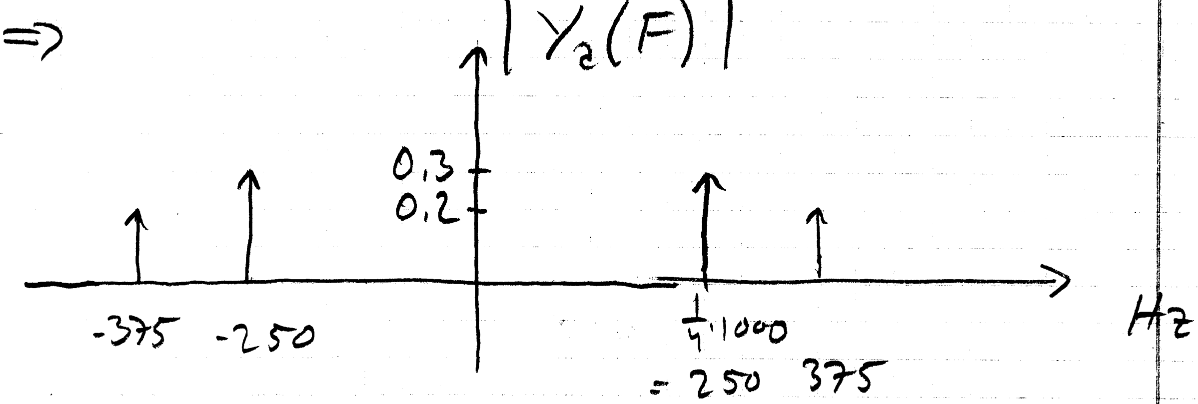


A clean plot of $X\left(\frac{F}{F_1}\right)$ between $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$



Now all freq. values are multiplied with the second sampling Freq. F_2 $(=F_s)$ 1000 Hz

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$y_a(t) = 0.6 \cdot \cos(500\pi t) + 0.4 \cos(750\pi t)$$

6. $H_1(z) = 1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2z^2$ ger nollst $z_{1,2} = r\,e^{\pm j\theta}$

Linjär fas om nollställen speglade i enhetscirklen, ger $z_{3,4} = \frac{1}{r}e^{\pm j\theta}$

och $H_2(z) = konst\,(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta)z^{-1} + \frac{1}{r^2}z^{-2})$, dvs

$$H(z) = konst\,(1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2})(1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta)z^{-1} + \frac{1}{r^2}z^{-2}) =$$

$$konst\,(1 - 2(r + \frac{1}{r})\cos\theta z^{-1} + (r^2 + \frac{1}{r^2} + 4\cos^2\theta)z^{-2} - 2(r + \frac{1}{r})\cos\theta z^{-3} + z^{-4})$$

För $z=1$ ska $H(z)=H_1(z)\,H_2(z)$ vara 1, ger

$$konst = 1/((1 - 2\frac{1}{r}\cos(\theta) + \frac{1}{r^2})(1 - 2r\cos(\theta) + r^2))$$