LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
Inst. för Elektro- och Informationsteknik

Tentamen 2014-05-27
SIGNALBEHANDLING I MULTIMEDIA, ETI265
Tid: 14.00–19.00
Sal: MA:10

Hjälpmedel:	Miniräknare, formelsamling i signalbehandling och en valfri bok i matematik. [*Allowed items on exam: calculator, DSP and mathematical tables of formulas*]
Observandum:	För att underlätta rättningen: [*In order to simplify the correction:*] -Lös endast en uppgift per blad. [*Only solve one problem per paper sheet.*] -Skriv namn på samtliga blad. [*Please write your name on every paper sheet.*] Påståenden måste motiveras via resonemang och/eller ekvationer. [*Statements must be motivated by reasoning and/or equations.*] Poäng från inlämningsuppgifterna adderas till tentamensresultatet. [*The points from the tasks will be added to the examination score.*] Max Tot. poäng (tentamen + båda inl.uppg) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0 [*Max Tot. score (exam + 2 tasks) = 5.0 + 0.5 +0.5 = 6.0*] Betygsgränser för kursen: 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p). [*Grading; 3 (≥3.0p), 4 (≥4.0p), 5 (≥5.0p).*]

1. Följande tids-diskreta signaler är givna;
   [*The following discrete time signals are given*]

$$x_1(n) = [\,-2 \quad \underset{\uparrow}{-1}\,]\ ,\quad x_2(n) = [\,2 \quad \underset{\uparrow}{-1} \quad -2 \quad 1 \quad -1\,]\ ,\quad x_3(n) = [\,\underset{\uparrow}{2} \quad -1\,]$$

   a) Bestäm resulterande sekvens ur faltningsuttrycket;
      $y(n) = x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$. (0.1p)
      [*Determine the resulting sequence from the convolution;*]

   b) Bestäm resulterande modulo 4 sekvens ur faltningsuttrycket;
      $x_1(n) \circledast_4 x_2(-n) \circledast_4 x_3(n)$. (0.2p)
      [*Determine the resulting modulo 4 sequence from;*]

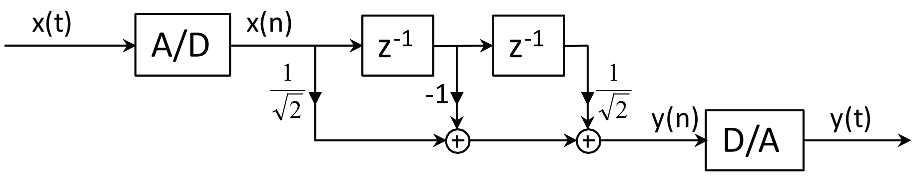
   c) Bestäm en sekvens $s(n)$ i modulo 2 så att följande uppfylls;
      $x_1(n) \circledast_2 s(n) = x_3(n)$. (0.2p)
      [*Determine a sequence $s(n)$ such that the following is fulfilled (in modulo 2);*]

2. En linjär tids-invariant krets beskrivs med differens-ekvationen,
[*The following linear time-invariant difference equation is given,*]

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}y(n-2) = x(n)$$

bestäm utsignalen då $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) + sin(2\pi\frac{1}{4}n), \quad -\infty \leq n \leq \infty.$ (0.5p)
[*Determine the output signal when* $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n) + sin(2\pi\frac{1}{4}n),$
$-\infty \leq n \leq \infty.$]

3. I figur 1 illustreras ett system, där insignalen $x(t) = cos(2\pi 1000t + \pi/4) + cos(2\pi 6000t)$ för $-\infty \leq t \leq \infty$ och där A/D- och D/A-omvandlarna är ideala och arbetar med sampelfrekvensen $F_s = 8000$ Hz.
[*Figure 1 illustrates our system where the input signal is given by* $x(t) = cos(2\pi 1000t + \pi/4) + cos(2\pi 6000t)$ *för* $-\infty \leq t \leq \infty$ *and where the A/D- and D/A converters are assumed ideal operating with sample frequency* $F_s = 8000$ *Hz.*]



Figur 1: *Systemet i uppgift 3.*

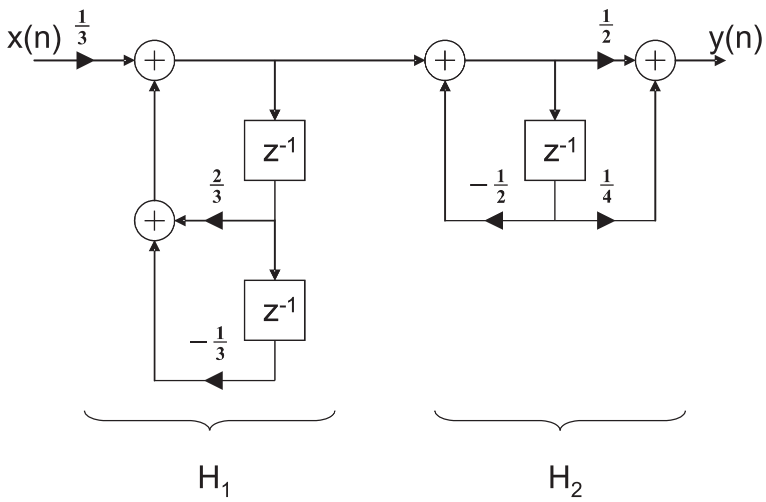
a) Bestäm det digitala systemets impulssvar $h(n)$, systemfunktion $H(z)$ och frekvenssvaret $H(\omega)$ samt skissa dess beloppsfunktion och fasfunktion för $-\pi \leq \omega \leq \pi$! (0.5p)
[*Determine the impulse response* $h(n)$*, the system function* $H(z)$ *and the frequency response* $H(\omega)$ *and also sketch the amplitude and phase spectrum!*]

b) Bestäm utsignalen $y(t)$! (0.5p)
[*Determine the output signal* $y(t)$*!*]

4. Systemet är givet av Figur 2 och det består av två del-system i kaskad, H_1 and H_2.
[*The system in Figure 2 consists of a cascade of two sub-systems,* H_1 *and* H_2*.*]

a) Bestäm differens-ekvationerna som hör till de två systemen H_1 och H_2 och beräkna respektive impulssvar $h_1(n)$ and $h_2(n)$. (0.4p)
[*Determine the difference equations corresponding to the systems* H_1 *and* H_2 *and calculate the impulse responses* $h_1(n)$ *and* $h_2(n)$*.*]

b) Bestäm det totala systemets differens-ekvation och skapa en direktform II realisering av det totala systemet. (0.3p)
[*Determine the difference equation describing the full system and give the direct form II realisation of the full system.*]



Figur 2: *Systemet i uppgift 4.*

c) Bestäm utsignalen, $y(n)$, om insignalen är given av, (0.3p)
[*Calculate the output signal, $y(n)$, if the input signal is given by,*]

$$x(n) = \delta(n) - \frac{2}{3}\delta(n-1) + \frac{1}{3}\delta(n-2)$$

5. Följande allmänna 2:a-grads systemfunktion är given,
[*The following general 2:nd order system function is given,*]

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

där insignalen $x(n) = 3sin(\frac{\pi}{2}n)u(n)$ och $y(-1) = \frac{1}{3}, y(-2) = 0$ och $b_0 = 0, b_1 = \frac{1}{5}, b_2 = 0$ samt $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0$. Bestäm,
[*where the input signal $x(n) = 3sin(\frac{\pi}{2}n)u(n)$ och $y(-1) = \frac{1}{3}, y(-2) = 0$ och $b_0 = 0, b_1 = \frac{1}{5}, b_2 = 0$ and $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 0$. Determine,*]

a) Zero-input-lösningen, $y_{zi}(n)$! (0.2p)
[*The Zero-input solution*]

b) Zero-state-lösningen, $y_{zs}(n)$! (0.2p)
[*The Zero-state solution*]

c) Den totala transienta lösningen, $y_{trans}(n)$! (0.2p)
[*The total transient solution*]

d) Den stationära lösningen, $y_{ss}(n)$! (0.2p)
[*The steady-state solution*]

e) Den totala lösningen, $y(n)$! (0.2p)
[*The total solution*]

6. De två studenterna Nick och Dick är båda intresserade av att följa temperaturvariationerna på sin hemort. Nick samplar temperaturen varje eftermiddag och skriver ner en sekvens av temperaturdata $x_1(n), n \geq 0$. Dick samplar också temperaturen varje eftermiddag (på samma plats) men han skriver ner ett medelvärde av de sista 7 dagarnas temperatur och skapar därmed en sekvens $x_2(n), n \geq 0$. Nick tycker att hans sekvens är mycket bättre eftersom han alltid kan skapa Dick's sekvens ur sin egen. Dick hävdar att även han kan skapa Nick's sekvens ur sin egen genom en linjär filtrering.

[*The two students Nick and Dick are both interested in following the temperature variations in their hometown. Nick samples the temperature at noon every day and writes down a sequence of temperature data,* $x_1(n), n \geq 0$. *Dick also samples the temperature at noon every day (at the same place) but he writes down an average of the 7 latest temperature measurements creating a sequence,* $x_2(n), n \geq 0$. *Nick believes that his method is better since he can always create Dick's sequence from his own sequence. Dick claims that he also can create Nick's sequence from his own using a linear filtering operation.*]

a) Bestäm ett villkor på hur Dick borde skapa sin sekvens för de första 6 samplena så att hans påstående blir korrekt! (0.3p)

[*Determine a requirement on how Dick should create his average for the first 6 samples in order for his claim to be true!*]

Ledtråd: bestäm ett villkor för medelvärdesbildningen så att detta blir en linjär filtrering, dvs en faltning.

[**HINT:** *Determine the requirements for the averaging to become a linear filtering, i.e. a convolution.*]

b) Introducera lämpliga beteckningar och ange ett slutet uttryck för hur Dick kan skapa Nick's sekvens ur sin egen. Den enda okända sekvensen i uttrycket skall vara Dick's sekvens! (0.7p)

[*Introduce adequate notations and specify a closed form expression on how Dick can create Nick's sequence from his own. The only unknown sequence in the expression should be Dick's sequence.*]

Svar, Answers:

1. Svar: a)

$$y(n) = [\,-8 \quad 4 \quad \underset{\uparrow}{10} \quad -5 \quad 2 \quad 1 \quad -1\,]$$

b)

$$y(n) = [\,-\underset{\uparrow}{10} \quad -5 \quad 10 \quad 5\,]$$

c) Definiera den okända sekvensen $s(n)$ enligt,

$$s(n) = s_1\delta(n) + s_2\delta(n-1)$$

En modulo 2 faltning mellan $s(n)$ och $x_1(n)$ mha tex en faltningstabell ger följande ekvationssystem;

$$-s_1 - 2s_2 = 2 \tag{1}$$
$$-2s_1 - s_2 = -1 \tag{2}$$

Lösningen av ovanstående ger följande svar;

$$s(n) = \frac{4}{3}\delta(n) - \frac{5}{3}\delta(n-1) = \begin{bmatrix} \underset{\uparrow}{4/3} & -5/3 \end{bmatrix}$$

2. Svar: Vi Z-transformerar följande differensekvation;

$$y(n) - y(n-1) + \frac{3}{16}\,y(n-2) = x(n)$$
$$Y(z)\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\,z^{-2}\right) = X(z)$$
$$Y(z) = \frac{1}{\left(1 - z^{-1} + \frac{3}{16}\,z^{-2}\right)}\,X(z)$$

Poler

$$p_{1,2} = \begin{cases} 1/4 \\ 3/4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\,z^{-1}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\,z^{-1}\right)}\,X(z)$$

Låt

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n)$$

där

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$
$$x_2(n) = \sin\left(2\pi\frac{1}{4}\,n\right)\forall n$$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}} \Rightarrow Y_1(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\ z^{-1}} + \frac{\frac{9}{2}}{1-\frac{3}{4}\ z^{-1}} - \frac{4}{1-\frac{1}{2}\ z^{-1}}$$

$$x_2(n) = \sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n\right) \forall n$$

Systemets förstärkning och fasförskjutning för frekvensen f=$\frac{1}{4}$ ges av;

$$H\left(w = 2\pi\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{1-e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + \frac{3}{16}\ e^{-j2\frac{\pi}{4}\ 2}} = \frac{1}{\frac{13}{16}+j} = 0.776e^{-j0.888}$$

Inverstransformering och insättning ger;

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{9}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n) + 0.776\sin\left(2\pi\frac{1}{4}\ n - 0.888\right)$$

3. Svar: a) Impulssvaret fås direkt ut figuren, då systemet är ett FIR-filter, enligt

$$h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(n) - \delta(n-1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(n-2)$$

Systemfunktionen är Z-transformen av $h(n)$, enligt

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} - z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}z^{-2}$$

Frekvenssvaret är givet enligt (ty FIR och alltid stabilt),

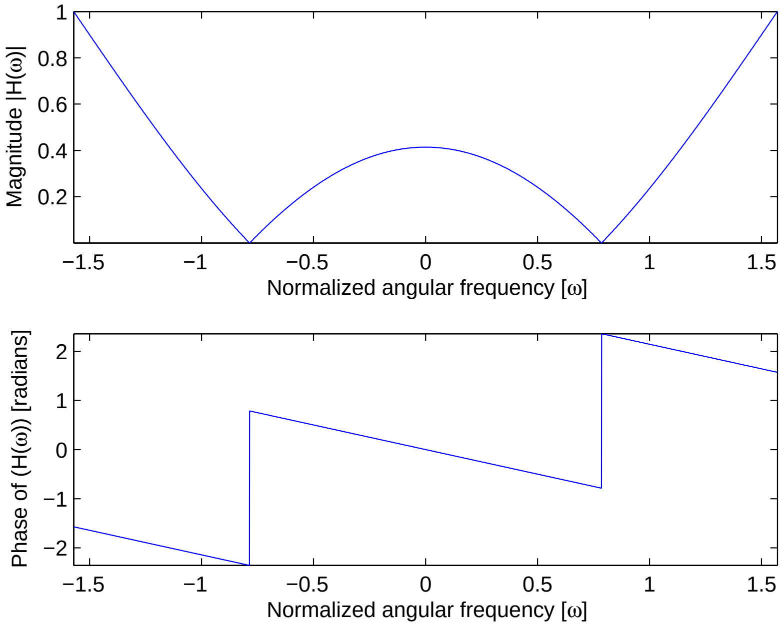
$$\begin{aligned} H(\omega) &= H(z)|_{z->e^{j\omega}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - e^{-j\omega} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j\omega}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}cos(\omega) - 1\right) \end{aligned}$$

b) Insignalen samplas med $F_s = 8000$ Hz, vilket ger följande digitala insignal;

$$\begin{aligned} x(n) &= \cos(2\pi 1000/8000n + \pi/4) + \cos(2\pi 6000/8000n), \quad -\infty \le n \le \infty \\ &= \cos(2\pi 1/8n + \pi/4) + \cos(2\pi(1-2/8)n), \quad -\infty \le n \le \infty \\ &= \cos(2\pi 1/8n + \pi/4) + \cos(2\pi(-2/8)n), \quad -\infty \le n \le \infty \\ &= \cos(2\pi 1/8n + \pi/4) + \cos(2\pi(2/8)n), \quad -\infty \le n \le \infty \end{aligned}$$

Systemet har följande överföring för frekvenserna $f_0 = 1/8$ och $f_1 = 2/8$,

$$\begin{aligned} H(2\pi\frac{1}{8}) &= 0 \\ H(2\pi\frac{2}{8}) &= e^{j\pi/2} \end{aligned}$$



Figur 3: *Magnitud och fasfunktion i uppgift 3.*

Dvs systemet släcker helt frekvensen 1/8 och förstärker frekvensen 2/8 med faktor 1 och fasförskjuter med $\pi/2$. Efter ideal rekonstruktion har vi följande utsignal;

$$y(t) = y(n)|_{n->F_s t} = \cos(2\pi 1/4 * 8000t + \pi/2) = \cos(2\pi 2000t + \pi/2)$$

4. Svar: a) Differens-ekvationerna fås direkt ur figuren (se formelsamling); vi uttrycker respektive insignal som $x_1(n)$ och $x_2(n)$ samt resp. utsignal som $y_1(n)$ och $y_2(n)$, vilket ger;

$$\begin{aligned} y_1(n) &= \frac{2}{3}y_1(n-1) - \frac{1}{3}y_1(n-2) + \frac{1}{3}x_1(n) \\ y_2(n) &= -\frac{1}{2}y_2(n-1) + \frac{1}{2}x_2(n) + \frac{1}{4}x_2(n-1) \end{aligned}$$

Detta ger följande två systemfunktioner;

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \\ H_2(z) &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Impulssvaren ges av invers Z-transform av de båda systemfunktionerna; Först tar vi fram poler till $H_1(z)$, vilket ger $p_{1,2} = \frac{1}{3} \pm j\frac{\sqrt{2}}{3}$. Då dessa är komplexkonjugerade skriver vi om uttrycket på följande sätt, så att vi direkt kan använda formelsamling för inverstransform; betckningarna från formelsamling ger följande; $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \beta = 620/649$

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \alpha\cos\beta z^{-1} + \frac{1}{\sqrt{3}\sin\beta}\alpha\sin\beta z^{-1}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} \end{aligned}$$

Inverstransformering ger;

$$h_1(n) = \alpha^n \left(\cos\beta n + \frac{1}{\sqrt{3}\sin\beta}\sin\beta n\right) u(n)$$

För $H_2(z)$ fås direkt;

$$h_2(n) = \frac{1}{2}\delta(n)$$

b) Det totala systemets systemfunktione ges av;

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}$$

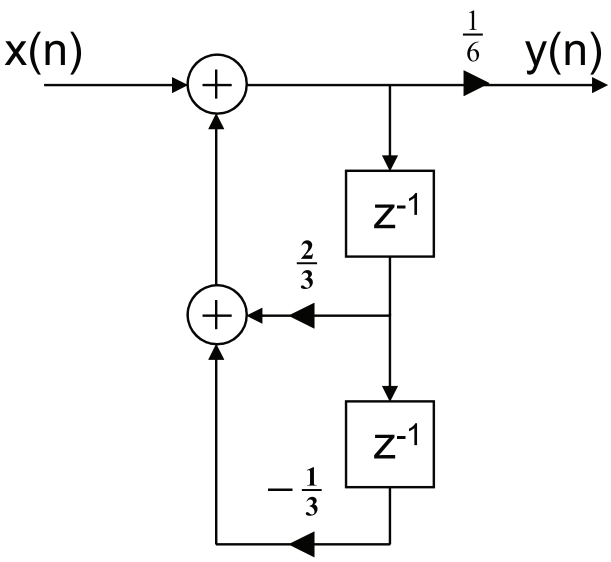
Vilket ger följande differens-ekvation

$$y(n) = \frac{2}{3}y(n-1) - \frac{1}{3}y(n-2) + \frac{1}{6}x(n)$$

c) Utsignalen ges av invers Z-transform av följande;

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} X(z), \qquad \text{där} \\ X(z) &= 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \\ &\Rightarrow \\ Y(z) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Dvs utsignalen är, $\underline{\underline{y(n) = \frac{1}{6}\delta(n)}}$.



Figur 4: *Direktform II till uppgift 4b.*

5. Svar: Vi har följande systemfunktion;

$$H(z) = \frac{\frac{1}{5}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\begin{aligned} x(n) &= 3\sin\left(\frac{\pi}{2}\ n\right)u(n) \rightarrow X(z) = 3\ \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} \\ y(n) &= -\frac{1}{2}\ y(n-1) + \frac{1}{5}\ x(n-1)\ ;\ y(-1) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Z^+-transformering ger

$$\begin{aligned} Y^+(z) &= -\frac{1}{2}\ z^{-1}\{Y^+(z) + y(-1)\cdot z\} + \frac{1}{5}\ z^{-1}X(z) \\ Y^+(z) &= \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}} + \frac{\frac{3}{5}\ z^{-2}}{\left(1+\frac{1}{2}\ z^{-1}\right)(1+z^{-2})} \\ &= \underbrace{\frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}}_{\text{zero-input},T_1} + \underbrace{\underbrace{\frac{3}{5}\ z^{-1}\left\{\ \frac{2}{5}\ \frac{1+2z^{-1}}{1+z^{-2}}\right.}_{\text{steady-state}} \underbrace{\left.-\frac{2}{5}\ \frac{1}{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}\ \right\}}_{T_2}}_{\text{zero-state}} \end{aligned}$$

Där T_1 och T_2 betecknar transient 1 och 2. Inverstransformering av respektive komponent ger;

a)

$$y_{zi}(n) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

b)

$$y_{zs}(n) = \frac{6}{25}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} u(n-1)$$

c)

$$y_{trans}(n) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) - \frac{6}{25}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

d)

$$y_{ss}(n) = \frac{6}{25}\cos\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) u(n-1)$$

e) Den totala lösningen ges av;

$$\begin{aligned} y(n) &= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} u(n) \\ &\quad + \frac{6}{25}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\ (n-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} u(n-1) \end{aligned}$$

6. Svar: Both students Nick and Dick are collecting data about the same real temperature variations, $x(n)$. Let us call Nick's sequence $x_1(n)$ and Dick's sequence $x_2(n)$.

a) According to the question, $x_2(n)$ is created by averaging the latest 7 days of temperature readings. This means that the impuls response of the averaging filter is given by:

$$h(n) = \frac{1}{7}\sum_{i=0}^{i=6} \delta(n-i)$$

In order for the averaging of the first six samples of $x_2(n)$ to become a linear filtering it needs to be calculated as:

$$\underline{\underline{x_2(n) = \frac{1}{7}\sum_{i=0}^{i=n} x(i) \qquad n = 0, 1, \ldots, 6}}$$

where $x(n)$ is the real temperature readings, OBSERVE that this is NOT an average of the first samples.
For all other samples it is given by

$$x_2(n) = \frac{1}{7}\sum_{i=0}^{i=6} x(n-i) \qquad n \geq 7$$

b) We know that Dick can create his sequence by convolution of Nick's sequence (since Nick's sequence is given by $x_1(n) = x(n)$):

$$x_2(n) = h(n) * x_1(n)$$

where $*$ is the convolution operator and $h(n)$ is given above. The question is how can we create $x_1(n)$ from $x_2(n)$ by linear filtering?
We need to find a filter $g(n)$ such that

$$x_1(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(i)x_2(n-i) = g(n) * x_2(n) = g(n) * h(n) * x_1(n)$$

This will be fulfilled if we construct the filter $g(n)$ as an inverse filter if $h(n)$, i.e.

$$g(n) * h(n) = \delta(n)$$

Now, by examining the convolution sum, see also fig (5) we conclude:

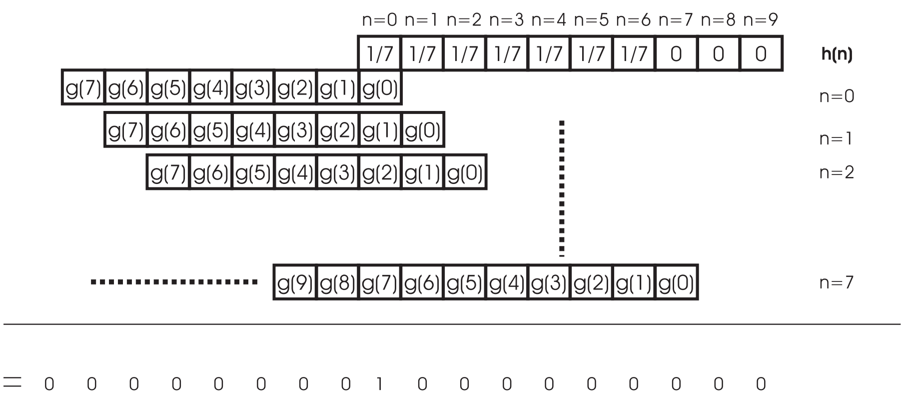
$$\begin{aligned}
&(n=0) \qquad g(0)\cdot h(0) = 1 => g(0) = \frac{1}{1/7} = 7 \\
&(n=1) \qquad g(0)\cdot h(1) + g(1)\cdot h(0) = 0 => g(1) = -\frac{1}{1/7} = -7 \\
&(n=2) \qquad g(0)\cdot h(2) + g(1)\cdot h(1) + g(2)h(0) = 0 => g(2) = 0 \\
&\qquad etc
\end{aligned}$$

The above continues and provides a repeated sequence $g(n)$ according to:

$$g(n) = s(n \bmod 7), \forall n \geq 0 \qquad \text{where } s(n) = 7\delta(n) - 7\delta(n-1)$$

where (n mod 7) stands for n modulus 7. Thus, the answer becomes:

$$\underline{\underline{x_1(n) = \sum_{i=0}^{n} s(i \bmod 7)x_2(n-i), \qquad \text{where } s(n) = 7\delta(n) - 7\delta(n-1)}}$$



Figur 5: *Assignment 6. Illustration of the convolution between $h(n)$ and $g(n)$.*