

Sammanfattning

Föreläsning 8 - Digitalteknik

I boken: avsnitt 5.1.2 (kap 4.1-4.4 i Hemert)

Karnaugh-diagram

Syftet med föreläsningen är att förstå hur vi minimerar med hjälp av Karnaugh-diagram i några olika, mer avancerade, situationer. Det inkluderar funktioner med fler än 4 variabler, konjunktiv form, samtidig minimering av flera funktioner, samt användande av P-tabeller.

För att hitta en minimal täckning av en funktion behöver vi endast välja bland primimplikatorerna. Så metoden är:

- Hitta alla primimplikatorer till $f^{-1}(1) \cup f^{-1}(0)$.
- Hitta alla väsentliga primimplikatorer. Dessa måste vara med i minimala printäckningen.
- Täck resterande ettor med ett minimalt antal primimplikatorer.

Karnaugh-diagram

En funktionstabell i matrisform som har max två variabler per dimension och där insignalcombinationerna är listade som en Gray-kod. För 2, 3 och 4 variabler ser Karnaugh-diagrammen ut som nedan. För fler variabler används flera diagram.

		x_2	
		0	1
x_1	0	$f(0)$	$f(1)$
	1	$f(2)$	$f(3)$

		x_2x_3			
		00	01	11	10
x_1	0	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(2)$
	1	$f(4)$	$f(5)$	$f(7)$	$f(6)$

		x_3	
		0	1
x_1x_2	00	$f(0)$	$f(1)$
	01	$f(2)$	$f(3)$
	11	$f(6)$	$f(7)$
	10	$f(4)$	$f(5)$

		x_3x_4			
		00	01	11	10
x_1x_2	00	$f(0)$	$f(1)$	$f(3)$	$f(2)$
	01	$f(4)$	$f(5)$	$f(7)$	$f(6)$
	11	$f(12)$	$f(13)$	$f(15)$	$f(14)$
	10	$f(8)$	$f(9)$	$f(11)$	$f(10)$

I ett Karnaugh-diagram är en implikator ett (cykliskt) rektangulärt block som täcker 2^k ettor.

Minimering med Karnaugh-diagram:

- Hitta alla cykliskt rektangulära block med 2^k 1or eller 0or – som inte är helt inneslutet i annan sådant block. Dessa representerar primimplikatorer.
- Hitta de väsentliga primimplikatorerna. Dessa måste finnas med i den minimala täckningen.
- Finn det minimala antalet av de övriga primimplikatorerna som behövs för att täcka funktionen.

Minimering i konjunktiv form:

För att minimera i konjunktiv form söker vi alla (cykliskt) rektangulära områden med 2^k nollor. Minimera som tidigare (sök väsentliga etc.) Skriv det minimala uttrycket i konjunktiv form.

Alternativ: Ett annat sätt att göra ovanstående är att istället studera $f'(x) = f(x) \oplus 1$. Då byts alla nollor mot ettor och vice versa. Minimera $f'(x)$ på vanligt vis (sök ettor) och använd därefter de Morgans lag. Exempelvis, om $f'(x) = x_1x_2 \vee x_1x_3$ är minimal disjunktiv form för $f'(x)$ så får vi

$$f(x) = (f'(x))' = (x_1x_2 \vee x_1x_3)' = (x'_1 \vee x'_2)(x'_1 \vee x'_3)$$

som minimal konjunktiv form av $f(x)$.

Att välja minimal täckning: Är valet av primimplikatorer inte uppenbart skapas en *primtabell* (P-tabell) som visar mintermer som kolumner samt de primimplikatorer som vi väljer bland som rader. Ett kryss $\times$ markerar att mintermen täcks av implikatorn. Upprepa sedan följande:

- en *väsentlig rad* innehåller ett $\times$ som inte finns i någon annan rad. Raden (primimplikatorn) måste då väljas. Ta bort de kolumner som täcks av denna.
- *rad r dominerar rad s* , $r \supset s$, om alla $\times$ i s också finns i r . Raden s kan då tas bort.
- *kolumn c dominerar kolumn d* , $c \supset d$, om alla $\times$ i d också finns i c . Den dominerande kolumnen c kan tas bort.

Har man fortfarande ingen unik lösning formulerar man ett *medtagningsvillkor* av formen $M = (P_{i_1^1} \vee P_{i_1^2} \vee \dots)(P_{i_2^1} \vee P_{i_2^2} \vee \dots) \cdots (\cdot)$ där $P_{i_1^1}, P_{i_1^2}, \dots$ är de rader som täcker första mintermen, $P_{i_2^1}, P_{i_2^2}, \dots$ är de rader som täcker andra mintermen, och så vidare. Beräkning av detta ger alla möjliga täckningar och man väljer den minimala.

Minimering med 5-6 variabler: För 5 variabler behöver vi tre dimensioner. Använd två separata Karnaugh-diagram (ett för $x_1 = 0$, ett för $x_1 = 1$) och tänk på dem som placerade under/över. Sök cykliska tre-dimensionella block med 2^k ettor.

För 6 variabler blir det liknande men mer komplicerat, fyra Karnaugh-diagram placerade enligt Gray-kodning av x_1, x_2 .

Samtidig minimering av flera funktioner: Eftersom en implikator i detta fall kan användas till båda funktionerna är samtidig minimering mer komplex än att bara minimera varje funktion för sig. För två funktioner gör man följande:

- Ta fram primimplikatorerna till $f_1(x)$, $f_2(x)$, samt till $f_1(x) \wedge f_2(x)$.
- Sätt upp P-tabellen med mintermer för både $f_1(x)$ och $f_2(x)$ kolumner. En rad (implikator) har kryss bara för den/de funktioner där den kan användas. Iterera sedan P-tabellen som tidigare.