# *Normalformer – DNF, CNF, och RMF*

*Linus Karlsson*

Antag att vi har en funktion som är definierad av $f^{-1}(1) = \{0, 2, 6, 7\}$. En minimal form[1] är $f(x_1, x_2, x_3) = x_1'x_3' \vee x_1x_2$. Det finns flera sätt att skriva om den till de olika normalformerna.

[1] Än så länge vet ni inte hur man kommer fram till den minimala formen. Oroa er inte – det kommer senare (typ väldigt snart) i kursen!

## *Disjunktiv normalform*[2]

[2] I disjunktiv normalform innehåller varje $\wedge$-produkt samtliga booleska variabler i funktionen. Vi har alltså en $\vee$-summa av $\wedge$-produkter, eller mer matematiskt:

$$f(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{c} \in f^{-1}(1)} \left( \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{(c_i)} \right)$$

(Om du tycker definitionen ovanför ser svår ut – titta gärna på exemplen samtidigt.)

Observera att denna form i vissa fall även kallas *full* disjunktiv normalform!

### *Alternativ 1 – on-set*

Förutsatt att vi vet, eller kan bestämma, funktionens on-set $f^{-1}(1)$ så kan vi förhållandevis enkelt skriva funktionen på dess disjunktiva normalform genom att helt enkelt skriva upp samtliga mintermer.

Vi behöver tre variabler för att kunna uttrycka det största talet 7, alltså behöver vår funktion $f$ vara av tre variabler $f(x_1, x_2, x_3)$. De fyra mintermerna fås från vårt on-set som

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= m_0 \vee m_2 \vee m_6 \vee m_7 \\ &= m_{000} \vee m_{010} \vee m_{110} \vee m_{111} \\ &= x_1'x_2'x_3' \vee x_1'x_2x_3' \vee x_1x_2x_3' \vee x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

och nu har vi direkt vår disjunktiva normalform.

### *Alternativ 2 – algebra*

Om vi inte vet vårt on-set, och inte vill räkna ut det, så kan vi använda algebraiska räknelagar för att skriva om uttrycket på disjunktiv form.

Vi utgår från vårt minimala uttryck $f(x_1, x_2, x_3) = x_1'x_3' \vee x_1x_2$. Vi kan utan problem skriva om det genom att lägga till extra 1:or i $\wedge$-produkterna.[3]

[3] Detta eftersom $a \wedge 1 = a$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1'x_3' \vee x_1x_2 \\ &= (x_1'x_3' \wedge 1) \vee (x_1x_2 \wedge 1) \end{aligned}$$

Eftersom $1 = a \vee a'$ kan vi ersätta vardera 1 med $x_i \vee x_i'$, så att vi får $\wedge$-uttryck med samtliga booleska variabler $x_1, x_2, x_3$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1'x_3' \wedge (x_2 \vee x_2')) \vee (x_1x_2 \wedge (x_3 \vee x_3')) \\ &= x_1'x_3'(x_2 \vee x_2') \vee x_1x_2(x_3 \vee x_3') \\ &= x_1'x_2x_3' \vee x_1'x_2'x_3' \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2x_3' \end{aligned}$$

## *Konjunktiv normalform*[4]

### *Alternativ 1 – off-set*

Om vi vet funktionens on-set kan vi bestämma funktionens off-set, som kommer vara alla fall där funktionen inte är 1, det vill säga komplementet till $f^{-1}(1)$. Det ger $f^{-1}(0) = \{1, 3, 4, 5\}$.

Dessa kan sedan skrivas som maxtermer[5]:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= M_1 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \\ &= M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \end{aligned}$$

Vi kan också hitta maxtermerna genom att se på mintermerna som vi hade när vi skrev som disjunktiv form. Vi skriver sedan maxtermer för de variabelkombinationer som inte har någon minterm.

När vi har maxtermerna kan vi sedan direkt skriva om på konjunktiv form. *Glöm inte att när vi skriver maxtermer motsvaras en* 0 *av icke-prim och* 1 *av primad variabel, dvs motsatsen mot mintermer!*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{100} \wedge M_{101} \\ &= (x_1 \vee x_2 \vee x_3')(x_1 \vee x_2' \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee x_3)(x_1' \vee x_2 \vee x_3') \end{aligned}$$

### *Alternativ 2 – algebra*

Vi kan använda ett liknande trick som för disjunktiv form, fast i konjunktiv form lägger vi istället till extra 0:or, eftersom $a \vee 0 = a$. Varje 0 kan sedan bytas ut mot genom $0 = x_i \wedge x_i'$.

Först måste dock uttrycket skrivas om på konjunktiv form, innan vi skriver om den på konjunktiv *normal*form. Vi använder regeln att $a \vee (bc) = (a \vee b)(a \vee c)$.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) =& x_1'x_3' \vee x_1x_2 \\ =& (x_1'x_3' \vee x_1)(x_1'x_3' \vee x_2) \\ =& \underbrace{(x_1' \vee x_1)}_{=1}(x_3' \vee x_1)(x_1' \vee x_2)(x_3' \vee x_2) \\ =& (x_1 \vee 0 \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee 0)(0 \vee x_2 \vee x_3') \\ =& (x_1 \vee x_2x_2' \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee x_3x_3')(x_1x_1' \vee x_2 \vee x_3') \\ =& (x_1 \vee x_2 \vee x_3')(x_1 \vee x_2' \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee x_3)(x_1' \vee x_2 \vee x_3') \\ & (x_1 \vee x_2 \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee x_3') \\ =& (x_1 \vee x_2 \vee x_3')(x_1 \vee x_2' \vee x_3')(x_1' \vee x_2 \vee x_3)(x_1' \vee x_2 \vee x_3') \end{aligned}$$

[4] I konjunktiv normalform innehåller varje $\vee$-summa samtliga booleska variabler i funktionen. Det vill säga den konjunktiva normalformen är en $\wedge$-produkt av $\vee$-summor.

$$f(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{c} \in f^{-1}(0)} \left( \bigvee_{i=1}^{n} x_i^{(c_i')} \right)$$

Observera att denna form i vissa fall även kallas *full* konjunktiv normalform!

[5] Under tiden du läser exemplen nedan – titta gärna tillbaka på den disjunktiva normalformen och jämför så du ser skillnaderna och likheterna mellan formerna.

## *Reed-Muller–form*[6]

### *Alternativ 1 – utgå från minimala formen*

Vi använder de algebraiska räknelagarna för hur man går mellan boolesk algebra och booleska ringen.[7]

Använd dem på $f(x_1, x_2, x_3) = x_1' x_3' \vee x_1 x_2$ för att byta ut $\vee$ och $'$.

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1' x_3' \vee x_1 x_2 \\
&= x_1' x_3' \oplus x_1 x_2 \oplus \underbrace{x_1' x_3' x_1 x_2}_{=0} \\
&= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_3) \oplus x_1 x_2 \\
&= 1 \oplus x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \\
&= 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3
\end{aligned}
$$

[6] Denna form kallas ibland Reed-Muller–form (RMF), ibland Ring-Sum-Expansion (RSE), och ibland Algebraisk Normalform (ANF). I denna kursen kallar vi den RMF.

Oavsett namn är poängen med RMF att skriva om uttrycket så det består enbart av operationer i den booleska ringen, det vill säga enbart addition ($\oplus$) och multiplikation.

*Notera speciellt att negation (prim, $'$) inte är tillåtet!*

[7] Det vill säga följande två regler:

$$a \vee b = a \oplus b \oplus ab \tag{1}$$
$$a' = 1 \oplus a \tag{2}$$

### *Alternativ 2 – utgå från disjunktiv normalform*

Har man många $\vee$-termer i sitt minimala uttryck kan ovanstående metod bli besvärlig, eftersom den extra termen i (1) ($ab$) kommer komma upp för varje $\vee$, vilket snabbt blir överväldigande. Se exemplet nedan.

$$
\begin{aligned}
a \vee b \vee c &= (a \vee b) \vee c \\
&= (a \vee b) \oplus c \oplus (a \vee b)c \\
&= (a \oplus b \oplus ab) \oplus c \oplus (a \oplus b \oplus ab)c \\
&= a \oplus b \oplus ab \oplus c \oplus ac \oplus bc \oplus abc
\end{aligned}
$$

Komplexiteten växer ganska brutalt allt eftersom vi får fler $\vee$ i uttrycket. I dessa fall kan nedanstående taktik fungera bättre.

Vi kan istället utnyttja vår disjunktiva normalform. Om vi tittar på termen $ab$ från ekvation (1) ser vi att den täcker fallet där både $a$ och $b$ är sanna. Men om vi tar två mintermer, t.ex. $m_i \vee m_j$ kommer alltid $m_i \wedge m_j = 0$, vilket gör att *just för mintermer*[8] så gäller att $m_i \vee m_j = m_i \oplus m_j$. Detta eftersom två mintermer aldrig kan vara sanna samtidigt.

[8] Okej, seriöst alltså, detta är superviktigt, *det gäller bara för mintermer!* Gör inte samma misstag som typ jättemånga studenter från tidigare år.

I vårt fall har vi att funktionen kan skrivas med mintermerna som[9]:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= x_1' x_2' x_3' \vee x_1' x_2 x_3' \vee x_1 x_2 x_3' \vee x_1 x_2 x_3 \\
&= x_1' x_2' x_3' \oplus x_1' x_2 x_3' \oplus x_1 x_2 x_3' \oplus x_1 x_2 x_3 \\
&= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2)(1 \oplus x_3) \oplus (1 \oplus x_1) x_2 (1 \oplus x_3) \oplus x_1 x_2 (1 \oplus x_3) \oplus x_1 x_2 x_3 \\
&= 1 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \\
&\quad \oplus x_2 \oplus x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \\
&\quad \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 x_3 \\
&= 1 \oplus x_3 \oplus x_1 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 x_2 \\
&= 1 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3
\end{aligned}
$$

[9] I just *detta* fall var det mycket effektivare att utgå från den minimala formen i Alternativ 1, då funktionen enbart hade en $\vee$. Jag visar ändå denna alternativa lösning eftersom den för vissa funktioner blir effektivare. Notera dock att vi så klart får samma svar oavsett metod.